ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διασπάσεις Ομάδων και Σχεδόν Ισομετρίες

ΜΑΡΘΑ ΓΙΑΝΝΟΥΔΟΒΑΡΔΗ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Επιβλέπων Καθηγητής: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΑΠΑΖΟΓΛΟΥ

ΑΘΗΝΑ 2014

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον Καθηγητή μου Παναγιώτη Παπάζογλου για την καθοδήγηση και υποστήριξή του τα τελευταία χρόνια, καθώς και τις παρατηρήσεις του πάνω στη διατριβή αυτή. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Δημήτρη Βάρσο και Ολυμπία Ταλέλλη για τις παρατηρήσεις τους, καθώς και για τη συμμετοχή τους στη συμβουλευτική επιτροπή μου.

Ευχαριστώ τους L. Funar και D. E. Otera για την όμορφη συνεργασία που είχαμε κατά τη συγγραφή του άρθρου [12].

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με στήριξαν και βοήθησαν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Ευχαριστώ την οικογένειά μου, και ιδιαιτέρως τη μητέρα μου, Χρυσάνθη, που δεν μου έβαλε ποτέ περιορισμούς στο τι μπορώ να κάνω στη ζωή μου και πάντα με ενθαρρύνει και με υποστηρίζει. Ευχαριστώ θερμά τον σύντροφό μου, Στέφανο, για την υποστήριξή και τη βοήθεια που μου έχει προσφέρει. Τέλος, ευχαριστώ τους φίλους μου που είναι πάντα δίπλα μου.

Κατά τη χρονική περίοδο Σεπτέμβριος 2009 Αύγουστος 2010, η παρούσα έρευνα έχει μερικώς χρηματοδοτηθεί από το κληροδότημα Νικ. Δ. Χρυσοβέργη, που διαχειρίζεται το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών.

Κατά τη χρονική περίοδο Σεπτέμβριος 2010 - Αύγουστος 2013, η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) – Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ . Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η Γεωμετρική Θεωρία ομάδων μελετά τις πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες ως γεωμετρικά/τοπολογικά αντικείμενα. Το απλούστερο παράδειγμα γεωμετρίας που αντιστοιχεί σε μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G είναι το Cayley γράφημά της ομάδας. Γενικότερα μελετάμε χώρους στους οποίους η ομάδα G δρα γεωμετρικά. Όλοι αυτοί οι χώροι είναι σχεδόν-ισομετρικοί, επομένως επικεντρωνόμαστε σε ασυμπτωτικές ιδιότητες, δηλαδή σε ιδιότητες αναλλοίωτες από σχεδόν ισομετρίες.

Η εργασία αυτή χωρίζεται σε δύο μέρη, στο πρώτο μέρος μελετάμε συνεκτικά συμμετρικά γραφήματα και στο δεύτερο κάποιες βασικές ασυμπτωτικές αναλλοίωτες της γεωμετρικής θεωρίας ομάδων.

Αρχικά ασχολούμαστε με συμμετρικά γραφήματα καθώς αποτελούν το γενικότερο πλαίσιο στο οποίο υπάγονται τα Cayley γραφήματα. Θυμίζουμε ότι συμμετρικά ονομάζονται τα γραφήματα των οποίων η ομάδα αυτομορφισμών δρα μεταβατικά στο σύνολο των κορυφών τους. Η εργασία μας σχετίζεται με αποτελέσματα των DeVos και Mohar [9, 10] σχετικά με τη δομή συμμετρικών γραφημάτων. Στο βασικό τους αποτέλεσμα εξετάζουν πως μπορούμε κοιτάζοντας μόνο ένα υποσύνολο των κορυφών του γραφήματος να συμπεράνουμε αν το γράφημα έχει δομή-δακτυλίου (παραπέμπουμε στον Ορισμό 3.4):

Θεώρημα 1 (DeVos, Mohar [10])**.** *Έστω $X = (V, E)$ ένα συμμετρικό γράφημα, και $A \subseteq V$ μη κενό πεπερασμένο με $|A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$ και τέτοιο ώστε το $A \cup \partial A$ να είναι συνεκτικό. Θέτουμε $k = |\partial A|$ και υποθέτουμε ότι $\mathrm{diam}(X) \geqslant 31(k+1)^2$. Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*

(i) $\mathrm{depth}(A) \leqslant k$ *και* $|A| \leqslant 2k^3 + k^2$.

(ii) Υπάρχουν ακέραιοι s, t με $st \leqslant \frac{k}{2}$ και ένα κυκλικό σύστημα $\vec{\sigma}$ στο X ώστε το X να έχει (s,t)-δομή-δακτυλίου. Επιπλέον, υπάρχει ένα διάστημα J της $\vec{\sigma}$ τέτοιο ώστε αν $Q = \bigcup_{B \in J} B$ τότε $A \subseteq Q$ και $|Q \setminus A| \leqslant \frac{1}{2}k^3 + k^2$.

Ερώτημα 1 ([10])**.** *Μπορεί να βελτιωθεί το Θεώρημα 1 ώστε το φράγμα στο (i) να είναι της μορφής ck^2;*

Επιχειρούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, δίνοντας δύο μερικές βελτιώσεις του θεωρήματος:

Θεώρημα (Θεώρημα 5, [14])**.** *Έστω $X = (V, E)$ ένα συνεκτικό άπειρο συμμετρικό γράφημα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία υποομάδα, G, της $\mathrm{Aut}(X)$ η οποία δρα συμμετρικά και διακριτά στο X. Αν $A \subseteq V$ είναι μη κενό πεπερασμένο και τέτοιο ώστε το $A \cup \partial A$ να είναι συνεκτικό, τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*

1. $|A| \leqslant 36|\partial A|^2$ *και* $\mathrm{depth}(A) \leqslant |\partial A|$.

2. *Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι s, t και ένα κυκλικό σύστημα $\vec{\sigma}$ στο X ώστε το X να έχει (s,t)-δομή-δακτυλίου. Επιπλέον, υπάρχει ένα διάστημα, J,*

του $\vec{\sigma}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $Q = \bigsqcup_{B \in J} B$ να περιέχει το A και $|Q \smallsetminus A| \leqslant 2s^2t^2|\partial A| + 2st|\partial A|$.

Θεώρημα (Θεώρημα 6, [14]). *Έστω $X = (V, E)$ ένα συνεκτικό άπειρο συμμετρικό γράφημα. Υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε αν $A \subseteq V$ πεπερασμένο με $|A| \geqslant c$ και τέτοιο ώστε το $A \cup \partial A$ να είναι συνεκτικό, τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*

(i) $|A| \leqslant 36|\partial A|^2$ *και* $\mathrm{depth}(A) \leqslant |\partial A|$.

(ii) *Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι s, t και ένα κυκλικό σύστημα $\vec{\sigma}$ στο X ώστε το X να έχει (s,t)-δομή-δακτυλίου. Επιπλέον, υπάρχει ένα διάστημα, J, του $\vec{\sigma}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $Q = \bigsqcup_{B \in J} B$ να περιέχει το A και $|Q \smallsetminus A| \leqslant 2s^2t^2|\partial A| + 2st|\partial A|$.*

Σημειώνουμε ότι στις αποδείξεις των δύο παραπάνω θεωρημάτων χρησιμοποιούμε δύο επεκτάσεις της ισοπεριμετρικής ανισότητας του Βαρόπουλου σε τοπικά πεπερασμένα συμμετρικά γραφήματα (παραπέμπουμε στην Παράγραφο 2.4.2).

Ερώτημα 2 ([10]). *Υπάρχει $c > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε συνεκτικό συμμετρικό γράφημα $X = (V, E)$ να ισχύει ότι $\frac{|\partial A|}{|A|} \geqslant \frac{c}{\mathrm{depth}(A)}$ όταν $A \subseteq V$ είναι πεπερασμένο και $0 < |A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$;*

Απαντάμε αρνητικά στο παραπάνω:

Πρόταση (Πρόταση 3.2, [14]). *Για κάθε $c > 0$ υπάρχει ένα συμμετρικό γράφημα T και ένα υπογράφημά του A τέτοια ώστε:*

$$\frac{|\partial A|}{|A|} < \frac{c}{\mathrm{depth}(A)}.$$

Στο τελευταίο αποτέλεσμα του πρώτου μέρους χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1 ώστε να συμπεράνουμε, κοιτώντας ένα μόνο υποσύνολο, πόσο κοντά είναι μία πεπερασμένη ομάδα στο να είναι κυκλική:

Πρόταση (Πρόταση 3.1, [14]). *Έστω $X = (V, E)$ ένα Cayley γράφημα μίας πεπερασμένης ομάδας G, $A \subseteq V$ μη κενό με $|A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$ και τέτοιο ώστε το $A \cup \partial A$ να είναι συνεκτικό. Αν $\operatorname{diam}(X) \geqslant 31(|\partial A| + 1)^2$ και $\operatorname{depth}(A) > |\partial A|$, τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $[G : \langle g \rangle] \leqslant |\partial A|$.*

Εύκολα προκύπτει το επόμενο:

Πόρισμα (Πόρισμα 3.2, [14]). *Έστω $X = (V, E)$ ένα Cayley γράφημα μίας πεπερασμένης ομάδας G. Εάν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $\operatorname{diam}(X) \geqslant 31n$ και $b(n + 1) - b(n) \leqslant \sqrt{n} - 1$, τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $[G : \langle g \rangle] \leqslant \sqrt{n}$.*

Στο δεύτερο μέρος, αρχικά ασχολούμαστε με την απλή συνεκτικότητα στο άπειρο και την ημιευστάθεια υπερβολικών ομάδων (Παραπέμπουμε στους Ορισμούς 4.2, 4.5). Σημειώνουμε ότι οι προαναφερθείσες ιδιότητες είναι ασυμπτωτικές αναλλοίωτες των πεπερασμένα παριστώμενων ομάδων. Οι Funar και Otera [13] όρισαν τον ρυθμό ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο και έδειξαν ότι είναι ασυμπτωτική αναλλοίωτη των πεπερασμένα παριστώμενων ομάδων (Παραπέμπουμε στον Ορισμό 4.6). Επιπλέον, δείξανε ότι κάποιες κατηγορίες ομάδων, όπως για παράδειγμα οι μηδενοδύναμες ομάδες χωρίς στρέψη, έχουν γραμμικό ρυθμό ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο.

Ερώτημα 3 ([13]). *Έστω G μία υπερβολική ομάδα, η οποία είναι απλά συνεκτική στο άπειρο. Είναι ο ρυθμός ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο της G γραμμικός;*

Ακολουθώντας το [13], ορίζουμε στο [12] το ρυθμό ανάπτυξης της ημιευστάθειας μίας ομάδας (Παραπέμπουμε στον Ορισμό 4.4). Όπου ορίζονται, ο ρυθμοί ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο και της ημευστάθειας μίας είναι ίδιοι:

Πρόταση (Πρόταση 4.3, [12]). *Έστω G μία πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα που είναι απλά συνεκτική στο άπειρο και ημιευσταθής. Τότε ο ρυθμός ανάπτυξης της ημευστάθειας της G ισούται με το ρυθμό ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητάς της στο άπειρο.*

Οδηγηθήκαμε λοιπόν στο να απαντήσουμε στο Ερώτημα 3 δείχνοντας το πιο γενικό:

Θεώρημα (Θεώρημα 7, [12]). *Ο ρυθμός ανάπτυξης της ημιευστάθειας μίας υπερβολικής ομάδας είναι γραμμικός.*

Το οποίο μας οδηγεί στο:

Θεώρημα (Θεώρημα 8, [12]). *Έστω G μια υπερβολική ομάδα η οποία είναι απλά συνεκτική στο άπειρο. Ο ρυθμός ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας της G στο άπειρο είναι γραμμικός.*

Στη συνέχεια, απομακρυνόμαστε από τις υπερβολικές ομάδες και μελετάμε γεωμετρικές συνθήκες που μας δίνουν πληροφορίες για τον αριθμό των περάτων μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας.

Ερώτημα 4 (Ερώτημα VI.19 στο [20]). *Είναι αληθές ότι μία άπειρη ομάδα περιέχει μία άπειρη κυκλική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη αν υπάρχει σε κάποιο Cayley γράφημά της μία ακολουθία σφαιρών των οποίων οι ακτίνες τείνουν στο άπειρο, ενώ το supremum του πληθάριθμού τους είναι πραγματικός αριθμός;*

Το ερώτημα αυτό έχει απαντηθεί θετικά από τους Erschler [20] και Timar [32]. Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να το απαντήσουμε χρησιμοποιώντας στοιχειώδη γεωμετρικά επιχειρήματα. Συγκεκριμένα, δείχνουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα:

Θεώρημα (Θεώρημα 9). *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα και X ένα Cayley γράφημά της. Αν για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $r_i, t_i \in \mathbb{N}$, και μία συλλογή $\{X_k(i)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων της σφαίρας $S(1, r_i)$, όπου όλα εκτός πεπερασμένων είναι κενά, τέτοια ώστε:*

1. $\lim_{i\to\infty} r_i = \lim_{i\to\infty} t_i = \infty$,
2. *για κάθε* $i \in \mathbb{N}$, $S(1, r_i) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k(i)$,
3. *υπάρχει* $c > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $i, k \in \mathbb{N}$, *έχουμε* $\mathrm{diam}(X_k(i)) < c$, *και*
4. *για κάθε* $i, k \in \mathbb{N}$, *αν* d_i *είναι η απόσταση έξω από τη μπάλα με κέντρο το ουδέτερο και ακτίνα* $r_i - 1$, *και* $X_k(i) \neq \emptyset$ *ισχύει ότι*

$$\inf\{d_i(X_k(i), X_l(i)) \mid l \in \mathbb{N}\setminus\{k\},\ X_l(i) \neq \emptyset\} \geqslant t_i,$$

τότε $e(G) > 1$.

Από το θεώρημα αυτό έπεται η παρακάτω πρόταση, η οποία απαντά θετικά στο Ερώτημα 4.

Πρόταση (Πρόταση 5.2). *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα και X ένα Cayley γράφημά της. Αν υπάρχει μία ακολουθία πραγματικών $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\lim_{i\to\infty} r_i = \infty$ και $\limsup_{i\to\infty} |S(1, r_i)| < \infty$, τότε η G είναι σχεδόν κυκλική.*

Τέλος, ασχολούμαστε με χώρους με ένα πέρας και το βάθος−πέρατος αυτών (Παραπέμπουμε στον Ορισμό 5.1). Το βάθος - πέρατος εισήχθηκε από τους Cleary και Riley [6]. Ο Otera [27] έδειξε ότι το βάθος - πέρατος είναι ασυμπτωτική αναλλοίωτη των πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων. Επιπλέον, έδειξε ότι υπερβολικές και CAT(0) ομάδες με ένα πέρας έχουν γραμμικό βάθος - πέρατος.

Ερώτημα 5. *Υπάρχουν ομάδες των οποίων το βάθος - πέρατος δεν είναι γραμμικό;*

Απαντάμε αρνητικά δείχνοντας ότι η συνάρτηση βάθους - πέρατος μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας με ένα πέρας είναι άνω φραγμένη από μία γραμμική συνάρτηση.

Πρόταση (Πρόταση 5.3, [12])**.** *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα με ένα πέρας έχει γραμμικό βάθους - πέρατος. Συγκεκριμένα, αν X είναι το Cayley γράφημα μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας ως προς ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων, και $V(r)$ είναι η συνάρτηση βάθους - πέρατος αυτού, τότε για αρκετά μεγάλα $r > 0$, ισχύει ότι $V(r) \leqslant 2r$.*

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα αποδείχθηκε ανεξάρτητα και με διαφορετικό τρόπο από τους Funar και Otera την ίδια περίοδο. Στο [12] εμφανίζονται και οι δύο αποδείξεις.

Κεφάλαιο 2

Αρχικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρουμε τα βασικά στοιχεία που θα χρειαστούμε για την εργασία αυτή. Συγκεκριμένα, στις Παραγράφους 2.1, 2.2 και 2.3 ορίζουμε κάποιες βασικές έννοιες και εισάγουμε το συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε. Στην Παράγραφο 2.4 αναφέρουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα του Βαρόπουλου και παρουσιάζουμε δύο επεκτάσεις της σε συμμετρικά γραφήματα.

2.1 Μετρικοί και Τοπολογικοί χώροι

Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $x \in X$ και $r \geqslant 0$. Συμβολίζουμε με $B_X(x, r)$ την κλειστή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r στο X:

$$B_X(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}.$$

Αν δεν υπάρχει σύγχυση, παραλείπουμε το δείκτη και γράφουμε απλά $B(x, r)$. Ομοίως, συμβολίζουμε με $S_X(x, r)$ (ή απλά $S(x, r)$) την σφαίρα με κέντρο το x

και ακτίνα r στο X:

$$S_X(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) = r\}.$$

Για κάθε $A \subseteq X$, η απόσταση του x από το A είναι:

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\},$$

και η r-γειτονιά του A στον X είναι:

$$\mathcal{N}_d(A,r) = \{y \in X \mid d(y,A) < r\}.$$

Έστω (X,d_1), (Y,d_2) δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Αν υπάρχουν σταθερές $\lambda \geqslant 1$ και $C \geqslant 0$ τέτοιες ώστε:

1. για κάθε $x_1, x_2 \in X$,

$$\frac{1}{\lambda} \cdot d_1(x_1,x_2) - C \leqslant d_2(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda \cdot d_1(x_1,x_2) + C,$$

2. για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ ώστε $d_2(f(x), y) \leqslant C$,

τότε λέμε και ότι η f είναι (λ, C)-σχεδόν-ισομετρία ή απλά **σχεδόν-ισομετρία** (quasi-isometry). Ισοδύναμα, η απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι σχεδόν-ισομετρία των μετρικών χώρων X, Y αν υπάρχουν σταθερές $\lambda \geqslant 1$ και $C \geqslant 0$ τέτοιες ώστε:

1. Για κάθε $x_1, x_2 \in X$,

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda \cdot d_1(x_1,x_2) + C.$$

2. Υπάρχει $g : Y \to X$ τέτοια ώστε:

 (α′) Για κάθε $y_1, y_2 \in Y$,

$$d_1(g(y_1), g(y_2)) \leqslant \lambda \cdot d_2(y_1, y_2) + C.$$

 (β′) Για κάθε $x \in X$, $y \in Y$,

$$d_1(gf(x), x) \leqslant C \quad , \quad d_2(fg(y), y) \leqslant C.$$

Οι μετρικοί χώροι X και Y είναι **σχεδόν-ισομετρικοί** (quasi-isometric) αν υπάρχει σχεδόν-ισομετρία $f : X \to Y$. Για παράδειγμα, οι μετρικοί χώροι $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι σχεδόν-ισομετρικοί. Επίσης, οποιοσδήποτε πεπερασμένος μετρικός χώρος είναι σχεδόν-ισομετρικός με σημείο. Οι ιδιότητες ενός χώρου που διατηρούνται κάτω από σχεδόν-ισομετρίες ονομάζονται **ασυμπτωτικές ιδιότητες** (ή ασυμπτωτικές αναλλοίωτες). Παραδείγματα ασυμπτωτικών ιδιοτήτων θα δούμε στην Παράγραφο 2.2.

Έστω (Z, d) ένας μετρικός χώρος και $X, Y \subset Z$. Ορίζουμε την **(σχετική) απόσταση Haussdorf**, $H^d(X, Y)$, των X, Y ως προς τη μετρική d ως το infimum των $\varepsilon > 0$ τέτοιων ώστε η ε-γειτονιά του X, $\mathcal{N}_d(X, \varepsilon)$, να περιέχει τον Y και η ε-γειτονιά του Y, $\mathcal{N}_d(Y, \varepsilon)$, να περιέχει τον X. Δηλαδή:

$$H^d(X, Y) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \mathcal{N}_d(X, \varepsilon) \supset Y, \mathcal{N}_d(Y, \varepsilon) \supset X\}.$$

Η απόσταση Haussdorf μπορεί να είναι άπειρη αλλά στο χώρο των υποσυνόλων του Z έχει τις υπόλοιπες ιδιότητες μίας μετρικής. Για παράδειγμα αν $Z = \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική και $X = (-\infty, 0)$, $Y = (0, +\infty)$, τότε $H^d(X, Y) = \infty$.

Έστω ότι ο X είναι γεωδαισιακός μετρικός χώρος. Αν I είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και $\gamma : I \to X$ μία γεωδαισιακή, η **απόσταση** της γ από ένα $x \in X$ είναι:

$$d(\gamma, x) = \inf_{t \in I} d(\gamma(t), x).$$

Στην εργασία αυτή θα ταυτίζουμε συχνά τη γ με την εικόνα της $\gamma(I)$ στο X. Για κάθε x, $y \in \gamma$ συμβολίζουμε με $[x, y]_\gamma$ το **υπό-μονοπάτι** (subpath) της γ που ενώνει το x με το y. Ονομάζουμε **γεωδαισιακή ακτίνα** στο X μία γεωδαισιακή $\gamma : [0, \infty) \to X$. Μια **διπλά άπειρα γεωδαισιακή** στο X είναι μία γεωδαισιακή $\gamma : \mathbb{R} \to X$.

Έστω τώρα ότι ο X είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Ένα $x \in X$ είναι (καθολικό) **σημείο κοπής** (global cut point) αν το $X \setminus \{x\}$ έχει τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες. Για παράδειγμα, αν X είναι ένα ανοιχτό διάστημα των πραγματικών, τότε οποιοδήποτε σημείο του είναι σημείο κοπής. Από την άλλη αν έχουμε ένα κλειστό διάστημα, υπάρχουν δύο σημεία του που δεν είναι σημεία κοπής, τα άκρα του διαστήματος.

Τέλος, καθώς ασχολούμαστε με ανάπτυξη συναρτήσεων ως ασυμπτωτική αναλλοίωτη χρειάζεται να ορίσουμε μία σχέση ισοδυναμίας πραγματικών συναρτήσεων. Γενικά λέμε ότι δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι **ισοδύναμες** αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $f(n/c) \leqslant g(n) \leqslant f(cn)$. Η σχέση αυτή είναι μία σχέση ισοδυναμίας στις πραγματικές συναρτήσεις. Οι κλάσεις συναρτήσεων που θα αναφέρουμε στην εργασία αυτή, θα θεωρούνται ως προς την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας.

2.2 Γραφήματα

Από εδώ και στο εξής με $X = (V, E)$ θα συμβολίζουμε ένα γράφημα με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E. Για απλότητα υποθέτουμε ότι τα γραφήματα με τα οποία ασχολούμαστε δεν έχουν πολλαπλές ακμές ή θηλιές (κυκλικές ακμές). Σημειώνουμε ωστόσο ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε ισχύουν και για γραφήματα με πολλαπλές ακμές ή θηλιές, και η υπόθεση αυτή γίνεται ώστε να απλουστευτεί σημαντικά ο συμβολισμός μας. Επίσης, τα γραφήματα που θωρούμε θα υποθέτουμε ότι είναι συνεκτικά.

Έστω $X = (V, E)$ ένα γράφημα. Ένα **μονοπάτι** (path) στο X είναι είτε το κενό γράφημα ή ένα γράφημα της μορφής:

$$p = (\{u_1, \dots, u_n\}, \{\{u_1, u_2\}, \dots, \{u_1, u_2\}\}),$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$ μη κενό. Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε το μονοπάτι p ως $p = (u_1, \dots, u_n)$. Το **μήκος**, $\ell(p)$, ενός μονοπατιού p είναι 0 αν το p είναι το κενό μονοπάτι, και διαφορετικά ισούται με το πλήθος των ακμών του. Η **απόσταση** δύο κορυφών u, $v \in V$, την οποία συμβολίζουμε με $d(u, v)$, είναι το μήκος ενός μικρότερου μονοπατιού στο X που ενώνει τις κορυφές αυτές. Με άλλα λόγια, η d είναι μία μετρική που ορίζεται στο γράφημα όταν αποδώσουμε σε κάθε ακμή μήκος ίσο με ένα. Έτσι, το (X, d) είναι γεωδαισιακός μετρικός χώρος.

Οι μπάλες και σφαίρες στο X ακολουθούν το συμβολισμό που δώσαμε στην Παράγραφο 2.1 και τα κέντρα τους θα είναι πάντα κορυφές του γραφήματος.

Για κάθε υπογράφημα $Y \leq X$, συμβολίζουμε με $|Y|$ τον αριθμό των κορυφών που βρίσκονται στο Y. Λέμε ότι το υπογράφημα Y είναι **συνεκτικό** (connected) αν για κάθε δύο κορυφές του Y υπάρχει ένα μονοπάτι που τις ενώνει. Έστω A μη κενό υποσύνολο του V. Συμβολίζουμε με $E(A)$ το υποσύνολο των ακμών του X οι οποίες έχουν και τα δύο άκρα τους στο A. Το **επαγόμενο υπογράφημα** του A στο X είναι το γράφημα $X(A) = (A, E(A))$. Για δύο κορυφές που δεν ανήκουν στο A, η **απόστασή** τους **έξω από το** A ισούται με το μήκος ενός συντομότερου μονοπατιού που βρίσκεται στο επαγόμενο υπογράφημα του $X \setminus A$. Λέμε ότι το A είναι συνεκτικό αν το επαγόμενο γράφημα $X(A)$ είναι συνεκτικό. Το **σύνορο** του A είναι το σύνολο:

$$\partial A = \{u \in V \setminus A \mid \{u, v\} \in E,\ \text{για κάποιο } v \in A\}.$$

Για κάθε $v \in V$, η **απόσταση** του v από το A είναι:

$$d(v, A) = \inf\{d(v, u) \mid u \in A\}.$$

Το **βάθος** (depth) του συνόλου A είναι το supremum, πάνω στις κορυφές του A, των αποστάσεων τους από το $V \setminus A$:

$$\mathrm{depth}(A) = \sup\{d(u, V \setminus A) \mid u \in A\}.$$

Συμβολίζουμε με $\mathrm{Aut}(X)$ την ομάδα αυτομορφισμών του X. Λέμε ότι το γράφημα X είναι **συμμετρικό** (vertex transitive) αν για κάθε $u, v \in V$, υπάρχει $g \in \mathrm{Aut}(X)$ ώστε $g(u) = v$. Με άλλα λόγια, ένα γράφημα είναι συμμετρικό αν η ομάδα αυτομορφισμών του δρα μεταβατικά στο σύνολο κορυφών του γραφήματος. Για κάθε $u \in V$, θέτουμε $\mathrm{Stab}(u)$ να είναι η σταθεροποιούσα της κορυφής u στην

$\mathrm{Aut}(X)$:

$$\mathrm{Stab}(u) = \{g \in \mathrm{Aut}(X) \mid g(u) = u\}.$$

Έστω H μία υποομάδα της ομάδας $\mathrm{Aut}(X)$. Λέμε ότι η H **δρα διακριτά** (discretely) στο X αν, για κάθε $u \in V$, η σταθεροποιούσα του u στην H:

$$\mathrm{Stab}_H(u) = \mathrm{Stab}(u) \cap H$$

είναι πεπερασμένη. Το γράφημα X είναι **τοπικά πεπερασμένο** αν σε κάθε κορυφή του είναι προσκείμενες πεπερασμένες το πλήθος ακμές. Είναι προφανές πως σε ένα τοπικά πεπερασμένο συμμετρικό γράφημα X, δύο οποιεσδήποτε κορυφές έχουν το ίδιο πλήθος (πεπερασμένο) ακμών προσκείμενες σε αυτές. Επιπλέον, δύο μπάλες με την ίδια ακτίνα έχουν το ίδιο πλήθος (πεπερασμένο) κορυφών. Συνεπώς, τότε, για κάθε φυσικό m, μπορούμε να ορίσουμε τον αριθμό των κορυφών, $b_X(m) \in \mathbb{N}$, των μπαλών ακτίνας m στο X. Όταν δεν υπάρχει σύγχυση, γράφουμε απλά $b(m)$. Η συνάρτηση $b_X(m)$ ονομάζεται **συνάρτηση ανάπτυξης** του X. Λέμε ότι το X έχει **γραμμική ανάπτυξη** αν η συνάρτηση ανάπτυξης του X είναι άνω φραγμένη από μία γραμμική συνάρτηση.

Από εδώ και στο εξής, στην εργασία αυτή θα υποθέτουμε πάντα ότι τα γραφήματα που αναφέρουμε είναι τοπικά πεπερασμένα. Έστω X ένα συνεκτικό συμμετρικό γράφημα. Θέτουμε $X \setminus A$ να είναι το επαγόμενο υπογράφημα του συνόλου κορυφών $V \setminus A$ στο X. Ο **αριθμός των περάτων**, $e(X)$, του X είναι το supremum, πάνω σε όλα τα πεπερασμένα $A \subseteq V$, του αριθμού των άπειρων (μη φραγμένων) συνεκτικών συνιστωσών του $X \setminus A$. Είναι γνωστό ότι το $e(X)$ είναι $0, 1, 2$ ή ∞ (Hopf [21], Halin [19]). Επίσης, το X έχει γραμμική ανάπτυξη αν και μόνο αν $e(X) = 2$ (Imrich και Seifter [23]).

Δύο γεωδαισιακές ακτίνες γ_1 και γ_2 ενός γραφήματος X **συγκλίνουν στο ίδιο πέρας** του X αν για κάθε συμπαγές $C \subset X$ υπάρχει $R \geqslant 0$ τέτοιο ώστε οι εικόνες $\gamma_1([R, \infty))$ και $\gamma_2([R, \infty))$ να βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $X \setminus C$. Το σύνολο των γεωδαισιακών ακτίνων κάτω από την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας είναι ακριβώς το σύνολο των περάτων του X.

2.3 Cayley γραφήματα

Στην εργασία αυτή, όταν G είναι μία αφηρημένη ομάδα, θα συμβολίζουμε με 1 το ουδέτερο στοιχείο της G. Επιπλέον, όταν θεωρούμε ένα σύνολο γεννητόρων για μία πεπερασμένα παραγόμενη (ή παριστώμενη) ομάδα θα υποθέτουμε πάντα ότι αυτό είναι πεπερασμένο.

Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και S ένα σύνολο γεννητόρων για τη G. Το **Cayley γράφημα**, X, της G ως προς το S ορίζεται ως το γράφημα με σύνολο κορυφών $V = \{g \mid g \in G\}$ και σύνολο ακμών:

$$E = \{\{g, gs\} \mid g \in G,\, s \in S \setminus \{1\}\}.$$

Στην παραπάνω σχέση εξαιρούμε το ουδέτερο ώστε να μην προκύπτουν θηλιές στο γράφημα.

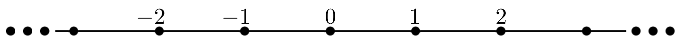
Η ομάδα G δρα μεταβατικά και με ισομετρίες στο X δια του πολλαπλασιασμού από αριστερά. Συγκεκριμένα, για κάθε $g, h \in G$ και $s \in S \setminus \{1\}$ έχουμε:

$$h \cdot \{g, gs\} = \{hg, hgs\}.$$

Συνεπώς το X είναι ένα τοπικά πεπερασμένο συνεκτικό συμμετρικό γράφημα.

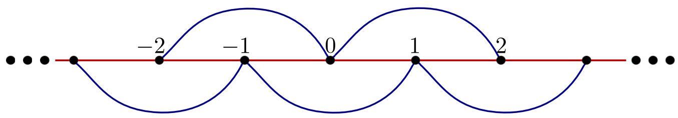
Σημειώνουμε ότι η φυσική μετρική του γραφήματος είναι η μετρική της λέξης στη G, ως προς το S, την οποία και θα συμβολίζουμε με d.

Παραδείγματα 2.1. *1. Αν θεωρήσουμε την ομάδα των ακεραίων* $\mathbb{Z}$ *με σύνολο γεννητόρων το* $S = \{1\}$, *τότε το Cayley γράφημα είναι ένα διπλά άπειρο μονοπάτι (Σχήμα 2.1). Η δράση του* $\mathbb{Z}$ *στο γράφημα είναι με μεταφορές πάνω στην ευθεία.*



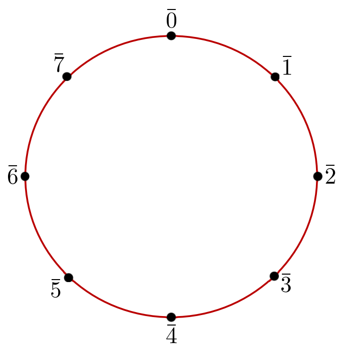
Σχήμα 2.1: Το Cayley γράφημα του $\mathbb{Z}$ ως προς το S.

Αν θεωρήσουμε ένα άλλο σύνολο γεννητόρων για το $\mathbb{Z}$, *το* $S_1 = \{1, 2\}$, *τότε προκύπτει το παρακάτω Cayley γράφημα (Σχήμα 2.2). Οι κόκκινες ακμές δημιουργούνται από το* 1 *και οι μπλε από το* 2.

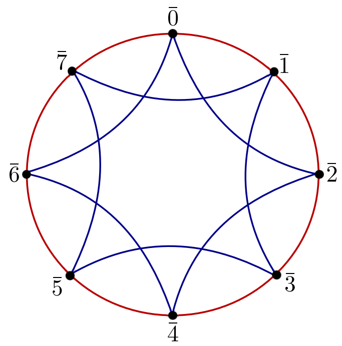


Σχήμα 2.2: Το Cayley γράφημα του $\mathbb{Z}$ ως προς το S_1.

2. Τα Cayley γραφήματα του $\mathbb{Z}_8$ *ως προς τα* $S_1 = \{\bar{1}\}$ *και* $S_2 = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ *είναι:*

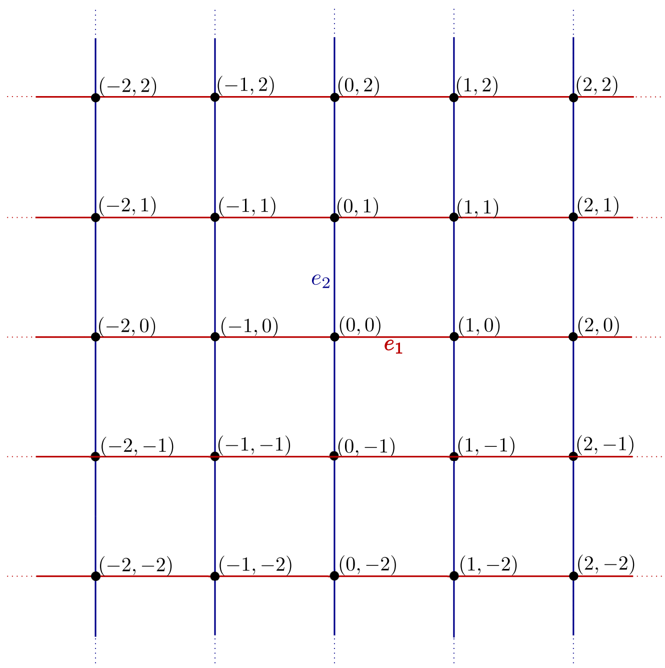


Σχήμα 2.3: Το Cayley γράφημα του $\mathbb{Z}_8$ ως προς το S_1.



Σχήμα 2.4: Το Cayley γράφημα του $\mathbb{Z}_8$ ως προς το S_2.

3. *Το Cayley γράφημα του* $\mathbb{Z}^2$ *που παράγεται από το σύνολο* $S = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ *είναι:*



Σχήμα 2.5: Το Cayley γράφημα του $\mathbb{Z}^2$ ως προς το S.

Η **συνάρτηση ανάπτυξης** της G ως προς το S είναι η συνάρτηση ανάπτυξης του γραφήματος X. Οι συναρτήσεις ανάπτυξης δύο Cayley γραφημάτων X_1, X_2 της ίδιας ομάδας ως προς πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων είναι ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $b_{X_1}(n/c) \leqslant b_{X_2}(n) \leqslant b_{X_1}(cn)$. Έτσι, η **ανάπτυξη** (growth) μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας είναι η κλάση ισοδυναμίας της συνάρτησης ανάπτυξης ενός Cayley γραφήματός της, ως προς ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων.

Είναι γνωστό ότι τα Cayley γραφήματα μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας είναι σχεδόν ισομετρικά. Καθώς ο αριθμός των περάτων είναι ασυμπτωτική αναλλοίωτη, μπορούμε να ορίσουμε τον **αριθμό των περάτων** μίας ομάδας, $e(G)$, ως τον αριθμό των περάτων οποιουδήποτε Cayley γραφήματός της (για περισσότερα παραπέμπουμε στο [5]). Όπως αναφέραμε και στα γραφήματα, από τον Hopf [21] έχουμε ότι μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G έχει 0,1,2 ή άπειρα το πλήθος πέρατα. Επίσης είναι προφανές ότι η G είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν $e(G) = 0$. Από την άλλη, από το Θεώρημα του Stallings [29] έχουμε ότι η G έχει ακριβώς δύο πέρατα αν και μόνο αν περιέχει μία άπειρη κυκλική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη. Συνεπώς, μία ομάδα έχει δύο πέρατα αν και μόνο αν είναι σχεδόν κυκλική, ισοδύναμα αν είναι σχεδόν ισομετρική με το $\mathbb{Z}$.

Μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G με Cayley γράφημα X έχει **ένα πέρας** (one-ended), ή αλλιώς είναι 0-συνεκτική στο άπειρο (0-connected at infinity), αν για κάθε συμπαγές $L \subseteq X$ υπάρχει $K \supseteq L$ τέτοιο ώστε κάθε δύο σημεία έξω από το K μπορούν να ενωθούν με μονοπάτι στο $X \setminus L$.

Έστω G μία πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα και $\mathcal{P} = \langle S \mid R \rangle$ μία πεπερασμένη παράσταση της G. Το **Cayley σύμπλεγμα** (Cayley complex) της G ως προς την $\mathcal{P}$ είναι το 2-διάστατο σύμπλεγμα που προκύπτει από το Cayley γράφημα της G ως προς το S, κολλώντας ένα δίσκο σε κάθε κλειστό μονοπάτι που αντιστοιχεί σε κάποιο $r \in R$. Η δράση της G στο Cayley σύμπλεγμα είναι η προφανής επέκταση της δράσης της στο Cayley γράφημα. Ο 1-σκελετός του Cayley συμπλέγματος είναι το Cayley γράφημα.

Το Cayley σύμπλεγμα οποιασδήποτε ελεύθερης είναι ακριβώς το Cayley γράφημά της. Το Cayley σύμπλεγμα του $\mathbb{Z}^2$, ως προς τη συνήθη παράστασή του $\langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1}\rangle$, είναι μια πλακόστρωση του επιπέδου με μοναδιαία πλακάκια.

2.4 Ισοπεριμετρικές ανισότητες

Οι ισοπεριμετρικές ανισότητες έχουν βασικό ρόλο στην μελέτη γραφημάτων και ιδιαιτέρως στη μελέτη τοπικής (connectivity - local expansion) και ολικής ανάπτυξης (growth -global expansion). Κατ΄ επέκταση έχουν βρεθεί στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος τομέων όπως η θεωρία γραφημάτων, θεωρία ομάδων και η διαφορική γεωμετρία. Στην Υποπαράγραφο 2.4.1 θυμίζουμε την Ισοπεριμετρική ανισότητα του Βαρόπουλου σε Cayley γραφήματα [33], και δίνουμε μία λεπτομερή απόδειξή της ακολουθώντας την απόδειξη του Gromov [8], [18]. Στη συνέχεια, στην Υποπαράγραφο 2.4.2, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε δύο επεκτάσεις της ισοπεριμετρικής ανισότητας του Βαρόπουλου σε τοπικά πεπερασμένα μεταβατικά γραφήματα.

2.4.1 Ισοπεριμετρική ανισότητα του Βαρόπουλου σε Cayley γραφήματα

Ισοπεριμετρική Ανισότητα του Βαρόπουλου για Cayley γραφήματα ([8], [18]). *Έστω X το Cayley γράφημα μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας G ως προς ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S. Αν $A \subset G$ είναι μη κενό και πεπερασμένο, και m είναι ο μικρότερος φυσικός ώστε $b(m) \geqslant 2|A|$, τότε*

$$|A| \leqslant 2m|\partial A|.$$

Η απόδειξη ακολουθεί την παρακάτω γνωστή στρατηγική που εφαρμόζεται γενικά σε περιπτώσεις που θέλουμε να βρούμε ένα φράγμα για τον όγκο του συνόρου ενός συνόλου. Ορίζουμε μία κατάλληλη μετακίνηση της μάζας από το σύνολο A στο συμπλήρωμά του, η οποία θα περνάει από το σύνορο του A. Εκτιμάμε τον όγκο της μάζας που περνά από το σύνορο ως ποσοστό του όγκου του συνόρου. Βρίσκουμε ένα κάτω φράγμα για τον όγκο της μάζας του A που μεταφέρεται έξω από το A. Έτσι οδηγούμαστε σε ένα φράγμα του όγκου του A, συναρτήσει του όγκου του συνόρου του. Στην περίπτωσή μας, ο όγκος ενός συνόλου είναι ο αριθμός των κορυφών του.

Απόδειξη. Έστω $X = (V, E)$. Για κάθε $g \in G$, συμβολίζουμε με f_g την ακόλουθη μεταφορά πάνω στο σύνολο κορυφών V του X:

$$\begin{aligned} f_g : V &\rightarrow V \\ x &\mapsto xg \end{aligned}$$

και θέτουμε $F_g = \{x \in A \mid f_g(x) \notin A\}$. Έστω $g = s_1 s_2 \dots s_k \in G$, με $s_i \in S$

και $d(g,1) = k \in \mathbb{N}$, όπου 1 είναι το ουδέτερο της G. Η μεταφορά f_g μπορεί να διασπαστεί σε στοιχειώδεις μεταφορές, ώστε:

$$\begin{aligned} F_g &\subseteq \{x \in A \mid xs_1 \notin A\} \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k} \{x \in A \mid xs_1 \dots s_{i-1} \in A,\, xs_1 \dots s_i \notin A\} \right) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{x \in A \mid xs_1 \dots s_i \in \partial A\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$|F_g| \leqslant d(g,1) \cdot |\partial A|. \tag{2.1}$$

Έστω ότι m είναι ο μικρότερος φυσικός τέτοιος ώστε $b(m) \geqslant 2|A|$. Συμβολίζουμε με $B(m)$ την μπάλα ακτίνας m με κέντρο το ουδέτερο στη G. Ο μέσος όρος, M, πάνω σε όλα τα $g \in B(m)$, του όγκου του A που μεταφέρεται έξω από το A από την f_g είναι:

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1}{b(m)} \sum_{g \in B(m)} |\{x \in A \mid f_g(x) \notin A\}| \\ &= \tfrac{1}{b(m)} \sum_{g \in B(m)} \sum_{x \in A} |\{(x,g) \mid f_g(x) \notin A\}| \\ &= \tfrac{1}{b(m)} \sum_{x \in A} |\{g \in B(m) \mid f_g(x) \notin A\}|. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in A$ και g, $h \in B(m)$ έχουμε ότι $xg = xh$ αν και μόνο αν $g = h$. Οπότε,

$$|\{g \in B(m) \mid f_g(x) \notin A\}| = |\{f_g(x) \notin A \mid g \in B(m)\}|.$$

Καθώς $xB(m) = B(x, m)$,

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1}{b(m)} \sum_{x \in A} |\{f_g(x) \in B(x, m) \smallsetminus A \mid g \in B(m)\}| \\ &\geqslant \tfrac{1}{b(m)} \sum_{x \in A} (b(m) \smallsetminus |A|) \geqslant \tfrac{|A|}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει $g \in B(m)$ τέτοιο ώστε $|F_g| \geqslant \frac{|A|}{2}$, και από την Εξίσωση (2.1) έπεται ότι $|A| \leqslant 2m|\partial A|$. □

2.4.2 Ισοπεριμετρικές ανισότητες σε μεταβατικά γραφήματα

Ξεκινάμε επεκτείνοντας την ισοπεριμετρική ανισότητα του Βαρόπουλου σε μεταβατικά γραφήματα:

Ισοπεριμετρική Ανισότητα του Βαρόπουλου ([14]). *Έστω $X = (V, E)$ ένα τοπικά πεπερασμένο συνεκτικό μεταβατικό γράφημα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία υποομάδα G της $\mathrm{Aut}(X)$, η οποία δρα μεταβατικά και διακριτά στο X. Για κάθε $A \subseteq V$ μη κενό και πεπερασμένο με $|A| \leqslant \frac{|V|}{2}$, αν m είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος ώστε $b(m) \geqslant 2|A|$, τότε:*

$$|A| \leqslant 2m|\partial A|.$$

Σημειώνουμε ότι οι υποθέσεις αυτής της εκδοχής της ανισότητας ισχύουν τετριμμένα για όλα τα πεπερασμένα μεταβατικά γραφήματα.

Απόδειξη. Για κάθε $g \in G$, $x \in X$ γράφουμε gx αντί για $g(x)$. Σταθεροποιούμε μία κορυφή $x \in V$ και θέτουμε $S = \{g \in G \mid d(x, gx) \leqslant 1\}$. Καθώς η G

δρα διακριτά στο τοπικά πεπερασμένο γράφημα X, συμπεραίνουμε ότι το S είναι πεπερασμένο. Επομένως η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη από το πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S. Έστω Y το Cayley γράφημα της G ως προς το S, και $f : G \to V$ με $f(g) = gx$. Καθώς $V(Y) = G$, θα μεταφέρουμε μέσω της f, την ισοπεριμετρική ανισότητα από το Y στο X. Έστω $A \subseteq V$ μη κενό και πεπερασμένο. Τότε,

$$|f^{-1}(A)| = |\mathrm{Stab}_G(x)| \cdot |A| < \infty.$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \partial f^{-1}(A) &= \{g \notin f^{-1}(A) \mid gS \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset\} \\ &= \{g \in G \mid gx \notin A \quad \& \quad \exists s \in S : gsx \in A\}. \end{aligned}$$

Καθώς $d_X(gx, gsx) = d_X(x, sx) \leqslant 1$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\partial f^{-1}(A) = \{g \in G \mid gx \in \partial A\} = f^{-1}(\partial A).$$

Έστω $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $b_X(m) \geqslant 2|A|$. Τότε:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_X(x,m)) &= \{g \in G \mid gx \in B_X(x,m)\} \\ &= \{g \in G \mid d_X(x, gx) \leqslant m\}. \end{aligned}$$

Έστω $y \in B_X(x,m)$, με $d_X(x,y) = k \leqslant m$, και έστω $p = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ ένα μονοπάτι που ενώνει τα $x_0 = x$ και $x_k = y$ και βρίσκεται μέσα στην μπάλα $B_X(x,m)$. Αφού $d_X(x, x_1) = 1$, υπάρχει $s_1 \in S$ τέτοιο ώστε $s_1 x = x_1$. Επιπλέον, $x_2 \in B_X(s_1 x, 1) = s_1 B_X(x, 1)$, άρα υπάρχει $s_2 \in S$ τέτοιο ώστε

$x_2 = s_1 s_2 x$. Συνεχίζοντας ομοίως πάνω στο μονοπάτι p καταλήγουμε στο ότι υπάρχουν $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ τέτοια ώστε $y = s_1 s_2 \dots s_k x$. Δηλαδή, υπάρχει $g \in B_G(m)$ τέτοιο ώστε $y = gx$. Από την άλλη, αν $h \in G$ τέτοιο ώστε $y = hx$, τότε $h \in g\mathrm{Stab}_G(x)$. Συνεπώς, $|B_G(m)| \geqslant |B_X(m)| \cdot |\mathrm{Stab}_G(x)|$, και άρα:

$$|B_G(m)| \geqslant 2|A| \cdot |\mathrm{Stab}_G(x)| = 2|f^{-1}(A)|.$$

Από την ισοπεριμετρική ανισότητα του Βαρόπουλου στην ομάδα G έχουμε:

$$|f^{-1}(A)| \leqslant 2m|\partial f^{-1}(A)|,$$

και έπεται η ανισότητα στο X. □

Πριν παρουσιάσουμε την ασυμπτωτική εκδοχή της ισοπεριμετρικής ανισότητας του Βαρόπουλου σε μεταβατικά γραφήματα, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση των συμπαγώς γενόμενων ομάδων. Στην περίπτωση αυτή αν S είναι ένα συμμετρικό συμπαγές σύνολο γεννητόρων για μία ομάδα G, τότε για κάθε $H \subseteq G$, το σύνορό του είναι το σύνολο $\partial H = \{g \notin H \mid gS \cap H \neq \emptyset\}$.

Θυμίζουμε ότι αν G είναι μία συμπαγώς γενόμενη ομάδα, τότε υπάρχει ένα αριστερά αναλλοίωτο μέτρο Haar, μ, στη G (για περισσότερα παραπέμπουμε στο [7]). Η ομάδα G ονομάζεται **μοναδιαία** (unimodular) αν το αριστερά αναλλοίωτο μέτρο Haar στη G είναι και δεξιά αναλλοίωτο.

Πρόταση 2.1 ([14]). *Έστω G μία συμπαγώς γενόμενη ομάδα, S ένα συμμετρικό συμπαγές σύνολο γεννητόρων για τη G, και έστω μ ένα μέτρο Haar στη G.*

1. *Εάν η G είναι μοναδιαία, $H \subseteq G$ συμπαγές και m είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος ώστε $\mu(B(1,m)) \geqslant 2\mu(H)$, τότε $\mu(H) \leqslant 2m\mu(\partial H)$.*

2. *Εάν η G δεν είναι μοναδιαία, υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε αν $H \subseteq G$ συμπαγές, τότε $\mu(H) \leqslant c\mu(\partial H)$.*

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι η G είναι μοναδιαία και έστω $H \subseteq G$ συμπαγές. Όπως και στην απόδειξη την ανισότητας για Cayley γραφήματα, για κάθε $g \in G$, έστω f_g η απεικόνιση:

$$\begin{aligned} f_g : G &\to G \\ x &\mapsto xg \end{aligned}$$

και $F_g = \{h \in H \mid f_g(h) \notin H\}$. Έστω $g = s_1 s_2 \dots s_k \in G$, με $s_i \in S$ και $d(g,1) = k \in \mathbb{N}$, τότε:

$$F_g = \{h \in H \mid hg \notin H\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{h \in H \mid hs_1 \dots s_i \in \partial H\}.$$

Για κάθε $y \in G$ έχουμε ότι $\{h \in H \mid hy \in \partial H\} \subseteq \partial H \cdot y^{-1}$, επομένως:

$$F_g \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \partial H \cdot (s_1 \dots s_i)^{-1}.$$

Καθώς η G είναι μοναδιαία, έχουμε ότι:

$$\mu(F_g) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mu(\partial H \cdot (s_1 \dots s_i)^{-1}) = k \cdot \mu(\partial H). \tag{2.2}$$

Από την άλλη, έστω $m \in \mathbb{N}$ ο ελάχιστος θετικός ακέραιος ώστε $\mu(B_G(1,m)) \geqslant$

$2\mu(H)$. Ο μέσος όρος, M, του $\mu(F_g)$ πάνω σε όλα τα $g \in B_G(1,m)$ είναι:

$$M = \frac{1}{\mu(B_G(1,m))} \int_{B_G(1,m)} \mu(F_g) d\mu.$$

Αν μ' είναι το μέτρο γινόμενο που παίρνουμε από το μ στο $G \times G$, τότε:

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1}{\mu(B_G(1,m))} \iint\limits_{B_G(1,m)\times H} \mu'(\{(g,h) \in B_G(1,m) \times H \mid hg \notin H\}) d\mu' \\ &= \tfrac{1}{\mu(B_G(1,m))} \int_H \mu(\{g \in B_G(1,m) \mid hg \notin H\}) d\mu. \end{aligned}$$

Ωστόσο, για κάθε $h \in H$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu(\{g \in B_G(1,m) \mid hg \notin H\}) &= \mu(\{h^{-1}w \in B_G(1,m) \mid w \notin H\}) \\ &= \mu(h^{-1}\{w \in B_G(1,m) \mid w \notin H\}) \\ &\geqslant \mu(B_G(1,m)) - \mu(H). \end{aligned}$$

Άρα, ο μέσος γίνεται:

$$M \geqslant \int_H (\mu(B_G(1,m)) - \mu(H)) \geqslant \frac{1}{2}\mu(H).$$

Συνεπώς υπάρχει $g \in B_G(1,m)$ τέτοιο ώστε $\mu(F_g) \geqslant \frac{1}{2}\mu(H)$, και χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (2.2) παίρνουμε το πρώτο μέρος της πρότασης.

Έστω τώρα ότι η G δεν είναι μοναδιαία. Για κάθε $s \in S$, υπάρχει $\lambda_s \in \mathbb{R}$ το οποίο εξαρτάται μόνο από το s, και τέτοιο ώστε για κάθε συμπαγές $H \subseteq G$, έχουμε ότι $\mu(Hs) = \lambda_s \mu(H)$ (για περισσότερα παραπέμπουμε στο [7]). Καθώς το σύνολο S είναι συμμετρικό, υπάρχει $s \in S$ τέτοιο ώστε $\lambda_s > 1$. Τότε:

$$\mu(\partial H) \geqslant \mu(Hs \smallsetminus H) \geqslant \mu(Hs) - \mu(H) = (\lambda_s - 1)\mu(H). \tag{2.3}$$

Συνεπώς, υπάρχει $c = \frac{1}{\lambda_s - 1} > 0$, το οποίο εξαρτάται μόνο από τη G, τέτοιο ώστε $\mu(H) \geqslant c\mu(\partial H)$. □

Πόρισμα 2.1 ([14]). *Έστω G μία συμπαγώς παραγόμενη ομάδα, S ένα συμμετρικό συμπαγές σύνολο γεννητόρων για τη G, και έστω μ ένα μέτρο Haar στη G. Υπάρχει $c \geqslant 0$, τέτοιο ώστε αν $H \subseteq G$ συμπαγές με $\mu(H) > c$, και m είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος ώστε $\mu(B(1, m)) \geqslant 2\mu(H)$, τότε $\mu(H) \leqslant 2m\mu(\partial H)$.*

Απόδειξη. Εάν η G είναι μοναδιαία, το συμπέρασμα για $c = 0$ έπεται άμεσα από την Πρόταση 2.1. Εάν η G δεν είναι μοναδιαία, έστω λ_s όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.1 και $c = \frac{1}{\lambda_s - 1} > 0$. Έστω $H \subseteq G$ συμπαγές με $\mu(H) > \frac{1}{2}\mu(B_G(1, c))$. Αν $m \in \mathbb{N}$ με $\mu(B_G(1, m)) \geqslant 2\mu(H)$, τότε $m > c$ και από την Πρόταση 2.1 έπεται ότι $\mu(H) \leqslant 2m\mu(\partial H)$. □

Είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε την ασυμπτωτική εκδοχή της ισοπεριμετρικής ανισότητας (δες επίσης [8]).

Ασυμπτωτικό ανάλογο της Ισοπεριμετρικής Ανισότητας του Βαρόπουλου για άπειρα μεταβατικά γραφήματα ([14]). *Έστω $X = (V, E)$ ένα άπειρο μεταβατικό γράφημα. Υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε αν $A \subseteq V$ είναι μη κενό και πεπερασμένο με $|A| \geqslant c$, και m είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος ώστε $b(m) \geqslant 2|A|$, τότε:*

$$|A| \leqslant 2m|\partial A|.$$

Απόδειξη. Έστω G η ομάδα αυτομορφισμών του X. Σταθεροποιούμε μια κορυφή x στο X και θέτουμε $S = \{g \in G \mid d_X(gx, x) \leqslant 1\}$. Τότε η G παράγεται από το συμμετρικό συμπαγές σύνολο S, και επομένως υπάρχει ένα αριστερά αναλλοίωτο μέτρο Haar, μ, στη G.

Θα μεταφέρουμε την ανισότητα που μας δίνει το Πόρισμα 2.1 από τη G στο X. Έστω $f : G \to V$ με $f(g) = gx$, και έστω μ_* η μεταφορά (pushforward) του μ στο X μέσω της f. Δηλαδή, για κάθε πεπερασμένο μη κενό $A \subseteq V$, το σύνολο $f^{-1}(A)$ είναι συμπαγές και $\mu_*(A) = \mu(f^{-1}(A))$. Για κάθε $a \in V$, υπάρχει $h \in G$ με $hx = a$, και:

$$\mu_*(\{a\}) = \mu(\{g \in G \mid gx = a\}) = \mu(h \cdot \mathrm{Stab}(x)) = \mu(\mathrm{Stab}(x)).$$

Προφανώς, έπεται ότι το μ_* είναι πολλαπλάσιο του αριθμητικού μέτρου στο X, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι ακριβώς ίσο με το αριθμιτικό μέτρο στο X. Έστω $A \subseteq V$ πεπερασμένο με $|A| > c$, όπου c είναι η σταθερά του Πορίσματος 2.1. Τότε, $\mu(f^{-1}(A)) \geqslant c$ και όπως και στην απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας του Βαρόπουλου, $\partial f^{-1}(A) = f^{-1}(\partial A)$, $\mu(B_G(e, m)) \geqslant 2\mu(f^{-1}(A))$. Συνεπώς, $|A| \geqslant 2m|\partial A|$.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Δομή-δακτυλίου

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με τη δομή δακτυλίου σε Cayley και συμμετρικά γραφήματα. Συγκεκριμένα, στην Παράγραφο 3.1 αναφέρουμε ό,τι θα χρειαστούμε για το κεφάλαιο αυτό καθώς και μία σύντομη περιγραφή των αποτελεσμάτων μας. Στην Παράγραφο 3.2 παρουσιάζουμε αναλυτικά τα αποτελέσματά μας.

3.1 Ορισμοί και προηγούμενα αποτελέσματα

Δίνουμε αρχικά κάποιους ορισμούς που θα χρειαστούμε για να ορίσουμε τη δομή-δακτυλίου σε ένα συμμετρικό γράφημα. Στη συνέχεια αναφέρουμε προηγούμενα αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσουμε. Τέλος, δίνουμε μία σύντομη περιγραφή των αποτελεσμάτων μας που θα ακολουθήσουν στην επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου αυτού.

Ορισμός 3.1. *Μία* ***κυκλική διάταξη*** *(cyclic order) σε ένα σύνολο A είναι μία συμμετρική σχέση $\sim$ τέτοια ώστε το επαγόμενο γράφημα, $\tilde{A}$, να είναι είτε κύκλος ή ένα διπλά άπειρο μονοπάτι. Η* ***απόσταση*** *δύο στοιχείων $x, y \in A$ στην κυκλική διάταξη είναι η απόστασή τους στο $\tilde{A}$ και συμβολίζεται με $\tilde{d}(x, y)$. Ένα* ***διάστημα*** *(interval) στο $\tilde{A}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq A$ τέτοιο ώστε, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant k-1$, να ισχύει ότι $x_i \sim x_{i+1}$.*

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $X = (V, E)$ είναι ένα συμμετρικό γράφημα.

Ορισμός 3.2. *Ένα* ***πρωταρχικό σύστημα*** *(system of imprimitivity), σ, στο X είναι μία διαμέριση του συνόλου V, η οποία είναι αναλλοίωτη από τη δράση της ομάδας αυτομορφισμών του γραφήματος X. Δηλαδή, για κάθε αυτομορφισμό g του X και για κάθε $B \in \sigma$, έχουμε ότι $g(B) \in \sigma$. Τα σύνολα που αποτελούν τη διαμέριση σ ονομάζονται* ***πρωταρχικά μπλοκ*** *(blocks of imprimitivity), ή απλά μπλοκ (blocks).*

Ορισμός 3.3. *Ένα* ***κυκλικό σύστημα*** *(cyclic system), $\vec{\sigma}$, στο γράφημα X είναι ένα πρωταρχικό σύστημα, σ, στο X εξοπλισμένο με μία κυκλική διάταξη την οποία διατηρούν οι αυτομορφισμοί του X. Η απόσταση δύο κορυφών του X στην κυκλική διάταξη $\vec{\sigma}$ είναι η απόσταση $\tilde{d}$ των μπλοκ στα οποία ανήκουν οι κορυφές.*

Ορισμός 3.4. *Έστω s, t θετικοί ακέραιοι, λέμε ότι το X έχει (s,t)-****δομή-δακτυλίου*** *((s,t)-ring-like) αν υπάρχει ένα κυκλικό σύστημα $\vec{\sigma}$ στο X, τέτοιο ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Κάθε μπλοκ του $\vec{\sigma}$ έχει s το πλήθος στοιχεία.*

2. *Αν x, y είναι δύο διαδοχικές κορυφές του X τότε για την απόστασή τους στην κυκλική διάταξη ισχύει ότι $\tilde{d}(x, y) \leqslant t$.*

Γενικά λέμε ότι το X έχει δομή-δακτυλίου αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι s, t τέτοιοι ώστε το X να έχει (s, t)-δομή-δακτυλίου.

Στα [9],[10], οι DeVos και Mohar παρουσιάζουν κάποια σημαντικά αποτελέσματα για τη δομή-δακτυλίου συμμετρικών γραφημάτων. Παραθέτουμε κάποια από αυτά που θα χρειαστούμε:

Αρχικά, το παρακάτω θεώρημα εξετάζει την δομή-δακτυλίου των συμμετρικών γραφημάτων με δύο πέρατα:

Θεώρημα 2 (DeVos, Mohar [10]). *Έστω $X = (V, E)$ συνεκτικό συμμετρικό γράφημα με δύο πέρατα. Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι s, t και ένα κυκλικό σύστημα $\vec{\sigma}$, τέτοια ώστε το X να έχει (s, t)-δομή-δακτυλίου ως προς την $\vec{\sigma}$. Επιπλέον, αν $A \subset V$ μη κενό πεπερασμένο και τέτοιο ώστε το $A \cup \partial A$ να είναι συνεκτικό και $|A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$, τότε υπάρχει ένα διάστημα, J, του $\vec{\sigma}$ τέτοιο αν $Q = \bigsqcup_{B \in J} B$, τότε $A \subseteq Q$ και $|Q - A| \leqslant 2s^2t^2k + 2stk$.*

Το βασικό τους θεώρημα, το οποίο αναφέρουμε και στον Πρόλογο ως Θεώρημα 1 μας δίνει ένα χαρακτηρισμό των συμμετρικών γραφημάτων:

Θεώρημα 3 (DeVos, Mohar [10]). *Έστω $X = (V, E)$ ένα συμμετρικό γράφημα, και $A \subseteq V$ μη κενό πεπερασμένο με $|A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$ και τέτοιο ώστε το $A \cup \partial A$ να είναι συνεκτικό. Θέτουμε $k = |\partial A|$ και υποθέτουμε ότι $\operatorname{diam}(X) \geqslant 31(k+1)^2$. Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*

(i) $\operatorname{depth}(A) \leqslant k$ *και* $|A| \leqslant 2k^3 + k^2$.

(ii) *Υπάρχουν ακέραιοι* s, t *με* $st \leqslant \frac{k}{2}$ *και ένα κυκλικό σύστημα* $\vec{\sigma}$ *στο* X *ώστε το* X *να έχει* (s,t)*-δομή-δακτυλίου. Επιπλέον, υπάρχει ένα διάστημα* J *της* $\vec{\sigma}$ *τέτοιο ώστε αν* $Q = \bigcup_{B \in J} B$ *τότε* $A \subseteq Q$ *και* $|Q \setminus A| \leqslant \frac{1}{2}k^3 + k^2$.

Τέλος, το Θεώρημα 3 έχει το επόμενο πόρισμα, το οποίο περιγράφει την ανάπτυξη των συμμετρικών γραφημάτων.

Πόρισμα 3.1. *Έστω* $X = (V, E)$ *ένα συνεκτικό άπειρο συμμετρικό γράφημα και* $A \subseteq V$ *μη κενό πεπερασμένο. Αν* $\mathrm{depth}(A) > |\partial A|$, *τότε το* X *έχει* (s,t)*-δομή-δακτυλίου, για κάποια* $s, t \in \mathbb{N}$ *με* $st \leqslant \frac{1}{2}|\partial A|$. *Ιδιαιτέρως, αν το* X *δεν έχει δομή-δακτυλίου τότε, για κάθε* $n \geqslant 0$, *έχουμε ότι* $b(n) > \frac{1}{2}n(n+1)$.

Στην Παράγραφο 3.2.1 χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3 για να εξετάσουμε πόσο απέχει μία πεπερασμένη ομάδα από το να είναι κυκλική.

Στα [9], [10], οι DeVos και Mohar εικάζουν ότι το Θεώρημα 3 ισχύει με ένα φράγμα της μορφής ck^2 αντί για $2k^3(1 + o(1))$ στο (i). Από την άλλη, εύκολα βλέπουμε ότι στο Cayley γράφημα του $\mathbb{Z}^2$, ένα φράγμα της μορφής ck^2 θα ήταν ακριβές. Στην Παράγραφο 3.2.2 παρουσιάζουμε κάποια αποτελέσματα προς τη λύση της εικασίας αυτής στην περίπτωση των άπειρων συμμετρικών γραφημάτων.

Οι Babai και Szegedy [1] έδειξαν ότι αν $X = (V, E)$ είναι ένα συνεκτικό συμμετρικό γράφημα και A ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο των κορυφών του με $|A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$, τότε $\frac{|\partial A|}{|A|} \geqslant \frac{2}{2\mathrm{diam}(A)+1}$. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, οι DeVos, Mohar, στην προσπάθειά τους να βελτιώσουν το φράγμα στο (i) του Θεωρήματος 3 είκασαν ότι η $\mathrm{diam}(A)$ μπορεί να αντικατασταθεί από ένα πολλαπλάσιο του βάθους του συνόλου A:

Εικασία 3.1 (DeVos, Mohar [9], [10])**.** *Υπάρχει* $c > 0$, *τέτοιο ώστε για κάθε συνεκτικό συμμετρικό γράφημα* $X = (V, E)$ *να ισχύει ότι* $\frac{|\partial A|}{|A|} \geqslant \frac{c}{\mathrm{depth}(A)}$ *όταν*

$A \subseteq V$ *είναι πεπερασμένο και* $0 < |A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$.

Εάν η εικασία αυτή ήταν αληθής, θα ακολουθούσε άμεσα η βελτίωση του Θεωρήματος 3. Στην Παράγραφο 3.2.3 θα δείξουμε ότι η εικασία αυτή είναι ψευδής, αποδεικνύοντας την Πρόταση 3.2 που οδηγεί σε αντιπαράδειγμα.

3.2 Τα αποτελέσματά μας

3.2.1 Ένα φράγμα για το πόσο απέχει μία πεπερασμένη ομάδα από το να είναι κυκλική

Στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3 σε Cayley γραφήματα πεπερασμένων ομάδων για να δείξουμε ότι όταν το γράφημα διαχωρίζεται από ένα σύνολο με 'μικρό' σύνορο, τότε υπάρχει μία κυκλική υποομάδα 'μικρού' δείκτη. Η μελέτη τέτοιου είδους προβλημάτων ξεκινάει από τις πεπερασμένα παραγόμενες άπειρες ομάδες και την προσπάθεια να εξετάσουμε πως σχετίζεται η ανάπτυξή τους με την ιδιότητα του να είναι σχεδόν μηδενοδύναμες. Ένα βασικό θεώρημα του Gromov [16] λέει ότι μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα είναι σχεδόν μηδενοδύναμη αν η συνάρτηση ανάπτυξής ενός Cayley γραφήματός της είναι άνω φραγμένη από μία πολυωνυμική συνάρτηση. Έπεται ότι μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα με γραμμική ανάπτυξη έχει υποομάδα πεπερασμένου δείκτη ισόμορφη με το $\mathbb{Z}$, και άρα η ομάδα είναι σχεδόν κυκλική. Οι Wilkie και van den Dries [34] δώσανε ένα φράγμα για το δείκτη μίας τέτοιας υποομάδας και δείξανε ότι είναι αρκετό να έχουμε μία γραμμική συνθήκη σε μία μόνο ακτίνα στο Cayley γράφημα. Το φράγμα αυτό βελτιώθηκε αργότερα από τους Imrich και Seifter:

Θεώρημα 4 ([22]). *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα. Υποθέτουμε ότι για κάποιο θετικό ακέραιο m, έχουμε $b(m) - b(m-1) = c$ με $c \leqslant m$. Τότε η G έχει μία υποομάδα ισόμορφη με το $\mathbb{Z}$, η οποία έχει δείκτη το πολύ c.*

Σημειώνουμε ότι στο Θεώρημα 4, το φράγμα c είναι ακριβές.

Περνώντας στις πεπερασμένες ομάδες, το θεώρημα του Gromov, όπως διατυπώθηκε αρχικά, ισχύει τετριμμένα καθώς όλες οι πεπερασμένες ομάδες έχουν πολυωνυμική (φραγμένη) ανάπτυξη και η τετριμμένη υποομάδα είναι πεπερασμένου δείκτη. Από την άλλη, η δουλειά των Shalom και Tao [28] που συνδέει την ανάπτυξη μίας μπάλας με το δείκτη μίας μηδενοδύναμης υποομάδας έχει νόημα για πεπερασμένες ομάδες (δες επίσης [24]). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούν μία πολυωνυμική συνθήκη για μία ακτίνα για να πάρουν ένα φράγμα για το δείκτη μίας πολυκυκλικής υποομάδας. Ωστόσο, το φράγμα που δίνουν είναι μια υπερ-εκθετική έκφραση της ακτίνας για την οποία ισχύει η συνθήκη. Τέλος, τα αποτελέσματα στα [34] και [22] δεν μπορούν να εφαρμοστούν αυτούσια στην περίπτωση των πεπερασμένων ομάδων καθώς βασίζονται στο ότι η ομάδα έχει 2 πέρατα.

Έστω $X = (V, E)$ το Cayley γράφημα μίας πεπερασμένης ομάδας G ως προς ένα σύνολο γεννητόρων S και $\vec{\sigma}$ ένα κυκλικό σύστημα στο X. Υποθέτουμε ότι το X έχει δομή-δακτυλίου ως προς το $\vec{\sigma}$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\vec{\sigma} = \{B_i\}_{i=0,\ldots,m}$ για να περιγράψουμε το κυκλικό σύστημα στο X, όπου $B_0, B_1, \ldots, B_m$ είναι τα μπλοκ της $\vec{\sigma}$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, για κάθε $i \in \mathbb{Z}_{m+1}$, η συμμετρική σχέση της διάταξης είναι $B_i \sim B_{i+1}$. Τέλος, θα υποθέτουμε ότι το ουδέτερο της G ανήκει στο μπλοκ B_0.

Έστω ϕ ένας αυτομορφισμός του γραφήματος X με $\phi(B_0) = B_i$ για κάποιο $i = 0, \ldots, m$. Λέμε ότι ο ϕ είναι μία i-**περιστροφή** ή απλά περιστροφή της $\vec{\sigma}$

αν, για κάθε $j \in \mathbb{Z}_{m+1}$, ισχύει ότι $\phi(B_j) = B_{j+i}$. Λέμε ότι ο ϕ είναι **ανάκλαση** της $\vec{\sigma}$ αν, για κάθε $j \in \mathbb{Z}_{m+1}$, ισχύει ότι $\phi(B_j) = B_{i-j}$. Είναι προφανές ότι αν η $\vec{\sigma}$ έχει περισσότερα από δύο μπλοκ, τότε ένας αυτομορφισμός του X είναι είτε περιστροφή ή ανάκλαση της $\vec{\sigma}$. Η δράση της G στο X επάγει, για κάθε $g \in G$, έναν αυτομορφισμό του γραφήματος X και συνεπώς μια περιστροφή ή ανάκλαση της $\vec{\sigma}$.

Πρόταση 3.1 ([14])**.** *Έστω $X = (V, E)$ ένα Cayley γράφημα μία πεπερασμένης ομάδας G, $A \subseteq V$ μη κενό με $|A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$ και τέτοιο ώστε το $A \cup \partial A$ να είναι συνεκτικό. Αν $\operatorname{diam}(X) \geqslant 31(|\partial A| + 1)^2$ και $\operatorname{depth}(A) > |\partial A|$, τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $[G : \langle g \rangle] \leqslant |\partial A|$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3 έχουμε ότι υπάρχουν ακέραιοι s, t με $st \leqslant \frac{|\partial A|}{2}$ και ένα κυκλικό σύστημα $\vec{\sigma} = \{B_i\}_{i=0,\ldots,m}$, για κάποιο θετικό ακέραιο m, ώστε το X να έχει (s,t)-δομή-δακτυλίου. Θυμίζουμε ότι υποθέτουμε ότι το ουδέτερο της G ανήκει στο μπλοκ B_0. Καθώς $\operatorname{diam}(X) \geqslant 31(|\partial A| + 1)^2$ και $st \leqslant \frac{|\partial A|}{2}$, έχουμε ότι $m > 2$. Έστω $g \in B_1$ και $h \in B_2$, θα δείξουμε ότι τουλάχιστον ένας από τους αυτομορφισμούς που επάγουν τα g, h και hg είναι περιστροφή. Ας υποθέσουμε ότι οι αυτομορφισμοί που επάγουν τα g και h είναι ανακλάσεις. Τότε, $hg \in B_1$ και για κάθε $i \in \mathbb{Z}_{m+1}$ έχουμε:

$$gB_i = B_{1-i} \quad \text{και} \quad hB_i = B_{2-i}.$$

Συνεπώς,

$$hgB_i = hB_{1-i} = B_{i+1},$$

και άρα ο αυτομορφισμός που επάγει το hg είναι περιστροφή.

Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει $x \in B_1 \cup B_2$ τέτοιο ώστε ο αυτομορφισμός που επάγει να είναι περιστροφή. Μάλιστα, ο αυτομορφισμός αυτός είναι $i-$περιστροφή για $i = 1$ ή 2, επομένως,

$$\langle x \rangle (B_0 \cup B_1) = X.$$

Έπεται ότι αν B είναι ένα σύστημα αντιπροσώπων της $\langle x \rangle$ στη G, τότε $B \subseteq B_0 \cup B_1$, και άρα $[G : \langle x \rangle] \leqslant 2s \leqslant |\partial A|$. □

Όσον αφορά το πως σχετίζεται η ανάπτυξη σε μία κλίμακα ενός Cayley γραφήματος μιας ομάδας με το δείκτη μιας κυκλικής υποομάδας της, ώστε να προκύψει ένα ανάλογο του Θεωρήματος 4 για πεπερασμένες ομάδες, η Πρόταση 3.1 μας δίνει το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 3.2 ([14]). *Έστω $X = (V, E)$ ένα Cayley γράφημα μίας πεπερασμένης ομάδας G. Εάν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $\operatorname{diam}(X) \geqslant 31n$ και $b(n+1) - b(n) \leqslant \sqrt{n} - 1$, τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $[G : \langle g \rangle] \leqslant \sqrt{n}$.*

Απόδειξη. Έστω $A = B(1, n)$, οπότε $|\partial A| \leqslant \sqrt{n} - 1$ και $\operatorname{depth}(A) = n + 1$. Προφανώς, αφού $n > 0$, το σύνολο A είναι μη κενό. Καθώς $\operatorname{diam}(X) \geqslant 31n$, έπεται ότι $|A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$ και $\operatorname{diam}(X) \geqslant 31(\partial A + 1)^2$. Επιπλέον, το σύνολο $A \cup \partial A = B(1, n + 1)$ είναι συνεκτικό και $\operatorname{depth}(A) > |\partial(A)|$. Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 3.1. □

3.2.2 Δομικά Θεωρήματα

Στην Παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε δύο δομικά θεωρήματα για άπειρα συμμετρικά γραφήματα. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου αυτού, τα παρακάτω θεωρήματα είναι μερικές βελτιώσεις του Θεωρήματος 3.

Θεώρημα 5 ([14]). *Έστω $X = (V, E)$ ένα συνεκτικό άπειρο συμμετρικό γράφημα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία υποομάδα, G, της $\mathrm{Aut}(X)$ η οποία δρα μεταβατικά και διακριτά στο X. Αν $A \subseteq V$ είναι μη κενό πεπερασμένο και τέτοιο ώστε το $A \cup \partial A$ να είναι συνεκτικό, τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*

1. $|A| \leqslant 36|\partial A|^2$ *και* $\mathrm{depth}(A) \leqslant |\partial A|$.

2. *Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι s, t και ένα κυκλικό σύστημα $\vec{\sigma}$ στο X ώστε το X να έχει (s,t)-δομή-δακτυλίου. Επιπλέον, υπάρχει ένα διάστημα, J, του $\vec{\sigma}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $Q = \bigsqcup_{B \in J} B$ να περιέχει το A και $|Q \smallsetminus A| \leqslant 2s^2t^2|\partial A| + 2st|\partial A|$.*

Απόδειξη. Αν $e(X) = 2$ ή $\mathrm{depth}(A) > |\partial A|$, από το Θεώρημα 2 και το Πόρισμα 3.1, παίρνουμε άμεσα το *2.* Συνεπώς, έστω ότι $e(X) = 1$ ή ∞ και $\mathrm{depth}(A) \leqslant |\partial A|$. Από το Πόρισμα 3.1 έχουμε ότι, για κάθε $n \geqslant 0$,

$$b(n) > \frac{1}{2}n(n+1) > \frac{n^2}{2}.$$

Έστω $m = 2\lceil\sqrt{|A|}\rceil$, όπου $\lceil\sqrt{|A|}\rceil$ είναι το άνω ακέραιο μέρος του $\sqrt{|A|}$ (δηλαδή ο ελάχιστος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $\sqrt{|A|}$). Τότε $b(m) > 2|A|$ και από την ισοπεριμετρική ανισότητα του Βαρόπουλου έχουμε:

$$|A| \leqslant 2m|\partial A| < 2(2\sqrt{|A|} + 1)|\partial A| \leqslant 6\sqrt{|A|}|\partial A|.$$

Επομένως, $|A| < 36|\partial A|^2$. □

Παρατήρηση 3.1. *1. Από την παραπάνω απόδειξη βλέπουμε ότι όταν τα X και A ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5, αν $|A| > 36|\partial A|^2$ τότε*

$e(X) = 2$ ή $\mathrm{depth}(A) > |\partial A|$. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, αν το σύνολο A ικανοποιεί τη σχέση $|A| > 36|\partial A|^2$ έπεται ότι το X έχει δομή-δακτυλίου.

2. *Προφανώς ένα Cayley γράφημα μίας πεπερασμένης παραγόμενης ομάδας ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5. Επιπλέον, θα μπορούσε το αποτέλεσμα αυτό να αποδειχθεί ανεξάρτητα χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα του Βαρόπουλου και, αντί του Πορίσματος 3.1, ένα αποτέλεσμα των Wilkie και van den Dries [34] που δίνει επίσης ένα φράγμα για την ανάπτυξη του Cayley γραφήματος.*

Υπάρχουν γραφήματα που δεν ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5 (δες [11]). Επομένως, είναι σκόπιμο να ψάξει κανείς για ένα ανάλογο αποτέλεσμα που δεν έχει περιορισμούς για την ομάδα αυτομορφισμών του γραφήματος. Χρησιμοποιώντας το ασυμπτωτικό ανάλογο της ισοπεριμετρικής ανισότητας του Βαρόπουλου στην απόδειξη του Θεωρήματος 5 παίρνουμε άμεσα το παρακάτω:

Θεώρημα 6 ([14]). *Έστω $X = (V, E)$ ένα συνεκτικό άπειρο συμμετρικό γράφημα. Υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε αν $A \subseteq V$ πεπερασμένο με $|A| \geqslant c$ και τέτοιο ώστε το $A \cup \partial A$ να είναι συνεκτικό, τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*

(i) $|A| \leqslant 36|\partial A|^2$ *και* $\mathrm{depth}(A) \leqslant |\partial A|$.

(ii) Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι s, t και ένα κυκλικό σύστημα $\vec{\sigma}$ στο X ώστε το X να έχει (s,t)-δομή-δακτυλίου. Επιπλέον, υπάρχει ένα διάστημα, J, του $\vec{\sigma}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $Q = \bigsqcup_{B \in J} B$ να περιέχει το A και $|Q \smallsetminus A| \leqslant 2s^2t^2|\partial A| + 2st|\partial A|$.

3.2.3 Το αντιπαράδειγμα στην Εικασία 3.1

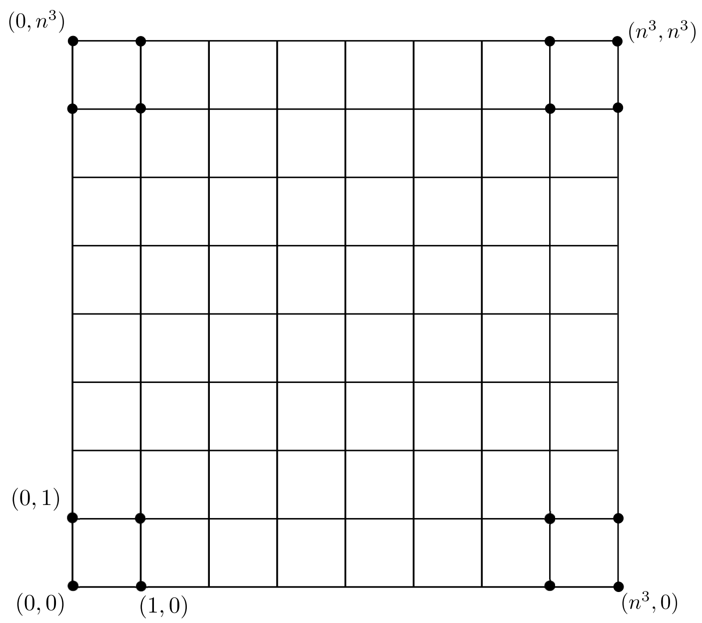
Στην παράγραφο αυτή δείχνουμε ότι καθώς το A τρέχει όλα τα υπογραφήματα όλων των τοπικά πεπερασμένων συμμετρικών γραφημάτων, η ποσότητα $\frac{|\partial A| \cdot \mathrm{depth}(A)}{|A|}$ δεν είναι κάτω φραγμένη από θετικό αριθμό.

Για κάθε θετικό ακέραιο n, θέτουμε B_n να είναι το $n^3 \times n^3$ γράφημα πλέγμα (square grid graph), με σύνολο κορυφών:

$$V_0 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x, y \leqslant n^3\}.$$

και σύνολο ακμών:

$$E_0 = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in V_0 \times V_0 \mid |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1\}$$

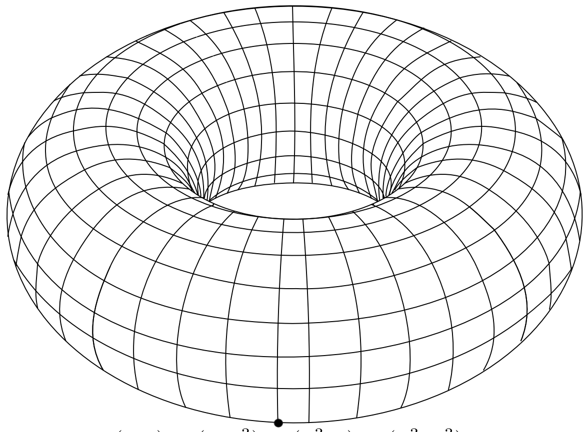


Σχήμα 3.1: Το γράφημα B_n.

Ορίζουμε το $n^3 \times n^3$ τοροειδές πλέγμα (toroidal grid), T_n, ως το γράφημα που παίρνουμε από το B_n κάνοντας τις ακόλουθες ταυτίσεις:

1. Για κάθε $0 \leqslant x \leqslant n^3$ ταυτίζουμε τις κορυφές $(x, 0)$ και (x, n^3), και για κάθε $0 \leqslant x < n^3$ ταυτίζουμε τις ακμές $\{(x, 0), (x + 1, 0)\}$ και $\{(x, n^3), (x + 1, n^3)\}$.

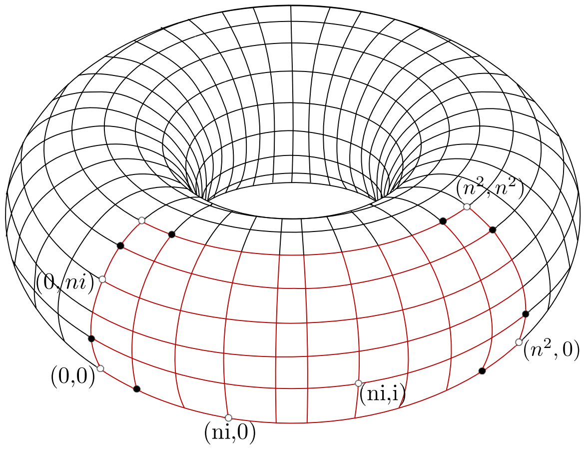
2. Για κάθε $0 \leqslant y \leqslant n^3$ ταυτίζουμε τις κορυφές $(0, y)$ και (n^3, y), και για κάθε $0 \leqslant y < n^3$ ταυτίζουμε τις ακμές $\{(0, y), (0, y + 1)\}$ και $\{(n^3, y), (n^3, y + 1)\}$.



Σχήμα 3.2: Το γράφημα T_n.

Τέλος, θέτουμε A_n να είναι το υπογράφημα του T_n το οποίο επάγει το σύνολο κορυφών:

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x, y \leqslant n^2, \text{ και τα } x, y \text{ δεν είναι ταυτόχρονα } 0 \pmod{n}\}.$$



Σχήμα 3.3: Το γράφημα A_n με κόκκινο πάνω στο T_n.

Πρόταση 3.2 ([14]). *Για κάθε $c > 0$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε το A_n, ως υπογράφημα του $n^3 \times n^3$ τοροειδούς πλέγματος T_n να ικανοποιεί τη σχέση:*

$$\frac{|\partial A_n|}{|A_n|} < \frac{c}{\mathrm{depth}(A_n)}.$$

Απόδειξη. Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $n > 2$, ισχύει ότι $\mathrm{depth}(A_n) \leqslant n$, $|\partial A_n| \leqslant 5n^2$, και $|A_n| \geqslant n^4$. Επομένως:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\partial A_n|\mathrm{depth}(A_n)}{|A_n|} = 0.$$

Οπότε, για κάθε $c > 0$ υπάρχει $n > 0$, ώστε το A_n να ικανοποιεί τη ζητούμενη ανισότητα. □

Κεφάλαιο 4

Υπερβολικές ομάδες

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με τοπολογικές ιδιότητες υπερβολικών ομάδων, και το ρυθμό ανάπτυξης συναρτήσεων που σχετίζονται με αυτές. Συγκεκριμένα, στις Παραγράφους 4.1 και 4.2 αναφέρουμε ό,τι θα χρειαστούμε, δίνουμε τους ορισμούς των ρυθμών ανάπτυξης που θα μελετήσουμε και εισάγουμε τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε. Στην Παράγραφο 4.3 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας για τη γραμμικότητα των ρυθμών ανάπτυξης της ημευστάθειας και της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο.

4.1 Γενικά για υπερβολικές ομάδες

Έστω (X, d) ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος και $z \in X$. Για κάθε x, y, $z \in X$, ορίζουμε το **γινόμενο κατά Gromov** των x, y στο z ως:

$$(x, y)_z = \frac{1}{2}(d(z, x) + d(z, y) - d(x, y)).$$

Λέμε ότι το γινόμενο Gromov στο z είναι δ-**υπερβολικό** (δ-hyperbolic), για κάποιο $\delta \geqslant 0$, αν για κάθε x, $y \in X$ έχουμε:

$$(x, y)_z \geqslant \min\{(x, w)_z, (w, y)_z\} - 2\delta.$$

Έστω Δ ένα γεωδαισιακό τρίγωνο στο X. Λέμε ότι το Δ είναι δ-**λεπτό** (δ-slim) αν κάθε πλευρά του περιέχεται στη δ-περιοχή της ένωσης των δύο άλλων πλευρών.

Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και X_G το Cayley γράφημά της ως προς ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων. Η ομάδα G είναι δ-**υπερβολική**, για κάποιο $\delta \geqslant 0$, εάν όλα τα γεωδαισιακά τρίγωνα στο X_G είναι δ-λεπτά. Στην περίπτωση αυτή έπεται ότι υπάρχει $z \in X_G$ ώστε το γινόμενο Gromov στο z να είναι δ-υπερβολικό στο X_G ([5], ch. III-H). Η ομάδα G είναι **υπερβολική** εάν είναι δ-υπερβολική για κάποιο $\delta \geqslant 0$. Πρέπει να σημειώσουμε ότι καθώς όλα τα Cayley γραφήματα μίας ομάδας είναι σχεδόν-ισομετρικά, το να είναι μία ομάδα υπερβολική είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του συνόλου γεννητόρων της. Επίσης, είναι γνωστό ότι οι υπερβολικές ομάδες είναι πεπερασμένα παριστώμενες. Παραδείγματα υπερβολικών ομάδων είναι οι πεπερασμένες ομάδες, οι σχεδόν κυκλικές και οι ομάδες επιφανειών (surface groups).

Έστω X_G το σύμπλεγμα της G. Υπενθυμίζουμε ότι ο 1-σκελετός, $X_G^{(1)}$, του X_G που σχετίζεται με μία παράσταση $\langle S \mid R \rangle$ είναι το Cayley γράφημα της G ως προς το σύνολο γεννητόρων S. Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, οι ομάδες που θα θεωρούμε θα είναι άπειρες. Οι γεωδαισιακές καθώς και τα σημεία του X_G που θα πραγματευόμαστε θα βρίσκονται στο $X_G^{(1)}$.

Παρατήρηση 4.1. *Είναι προφανές ότι αν η G με Cayley σύμπλεγμα X είναι*

δ-υπερβολική για κάποιο $\delta \geqslant 0$, τότε είναι επίσης δ'-υπερβολική για οποιοδήποτε $\delta' > \delta$. Συνεπώς, δεδομένης μίας σταθεράς c η οποία εξαρτάται από το δ, μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $\delta' > \delta$, το οποίο να είναι μεγαλύτερο του c και να βλέπουμε το X σαν δ'-υπερβολικό χώρο, χωρίς να αλλάζουμε τη γεωμετρία συμπλέγματος.

Οι Bestvina και Mess [2] αποδεικνύουν την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4.1 (Bestvina, Mess)**.** *Έστω G μία υπερβολική ομάδα με ένα πέρας και X ένα Cayley σύμπλεγμα της. Υπάρχει $c \geqslant 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$, να υπάρχει μία γεωδαισιακή ακτίνα που ξεκινά από το ουδέτερο της G και απέχει το πολύ c από το x.*

4.2 Τοπολογικές έννοιες

Έστω X ένας γεωδαισιακός χώρος. Λέμε ότι δύο γεωδαισιακές ακτίνες $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \infty) \to X$ είναι **ασυμπτωτικές** (asymptotic) αν οι εικόνες τους στο X έχουν πεπερασμένη απόσταση Hausdorff. Αυτό ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας, την **ασυμπτωτικότητα**, στο χώρο των γεωδαισιακών στο X. Το **σύνορο** (boundary), ∂X, του X είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, ως προς την ασυμπτωτικότητα, του χώρου των γεωδαισιακών του X. Σε αυτό το κεφάλαιο όπως και στο επόμενο, αν δεν αναφέρουμε διαφορετικά, θα υποθέτουμε ότι οι γεωδαισιακές που θεωρούμε έχουν μοναδιαία ταχύτητα.

Ορισμός 4.1. *Έστω X το Cayley σύμπλεγμα μίας πεπερασμένα παριστώμενης ομάδας G ως προς μια πεπερασμένη παράσταση. Το X ικανοποιεί τη σχέση $\mathrm{Rel}(M)$ για κάποιο $M > 0$ αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $R > 0$ και*

$x, y \in S(1, R)$ με $d(x, y) \leq M$, υπάρχει μονοπάτι μήκους το πολύ L, το οποίο ενώνει τα x και y, έξω από την μπάλα $B(1, R-c)$, όπου c είναι η σταθερά της Πρότασης 4.1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το X ικανοποιεί τη $\mathrm{Rel}(M)$ με σταθερά L.

Μία πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα G ικανοποιεί τη $\mathrm{Rel}(M)$ αν η $\mathrm{Rel}(M)$ ικανοποιείται από κάποιο (και συνεπώς κάθε) Cayley σύμπλεγμά της.

Η παρακάτω πρόταση φανερώνει το πόσο σημαντική είναι η $\mathrm{Rel}(M)$:

Πρόταση 4.2 ([2]). *Έστω G μία υπερβολική ομάδα με ένα πέρας. Αν για κάποιο $M > 0$ η G δεν ικανοποιεί τη $\mathrm{Rel}(M)$, τότε το σύνορο ∂G περιέχει ένα καθολικό σημείο κοπής.*

Οι Bowditch, Svenson, και Swarup [3, 30, 31] δείξαν ότι το σύνορο μίας υπερβολικής ομάδας με ένα πέρας δεν περιέχει καθολικά σημεία κοπής. Συνεπώς, κάθε υπερβολική ομάδα με ένα πέρας ικανοποιεί τη $\mathrm{Rel}(M)$, για κάθε $M > 0$.

Ορισμός 4.2. *Έστω X ένας γεωδαισιακός χώρος. Λέμε ότι ένα πέρας, e, του X είναι* ***ημιευσταθές*** *(semistable) αν για κάθε γεωδαισιακή, γ, στο X, η οποία συγκλίνει στο e, και για κάθε $n \geqslant 0$ υπάρχει $N \geqslant n$ ώστε κάθε κλειστό μονοπάτι με βάση κάποια κορυφή πάνω στη γ και το οποίο βρίσκεται έξω από την μπάλα ακτίνας N, μπορεί να μεταφερθεί, πάνω στη γ, στο άπειρο μέσω μίας ομοτοπίας έξω από την μπάλα ακτίνας n. Ο χώρος X είναι* ***ημιευσταθής*** *αν όλα τα πέρατά του είναι ημιευσταθή.*

Μία πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα G είναι ημιευσταθής αν ο καθολικός χώρος επικάλυψης ενός (ισοδύναμα οποιουδήποτε) πεπερασμένου συμπλέγματος του οποίου θεμελιώδης ομάδα είναι η G, είναι ημιευσταθής.

Γνωρίζουμε πολλές κατηγορίες ομάδων που είναι ημιευσταθείς (για παράδειγμα παραπέμπουμε στα [25, 26], και σχετικά με υπερβολικές ομάδες στα [3, 30, 31]). Ωστόσο, δεν έχουν βρεθεί παραδείγματα πεπερασμένα παριστώμενων ομάδων οι οποίες δεν είναι ημιευσταθείς.

Ορισμός 4.3. *Έστω X ένας μη συμπαγής τοπολογικός χώρος, e ένα πέρας του X και γ μία γεωδαισιακή που συγκλίνει στο e. Η* ***συνάρτηση ανάπτυξης την ημιευστάθειας*** *(semistability growth function), $S_e(r)$, του e είναι σε κάθε r το infimal $N(r)$ με την ιδιότητα: για κάθε $R \geqslant N$ και κάθε κλειστό μονοπάτι l, με βάση κάποιο σημείο της γ και το οποίο βρίσκεται έξω από την μπάλα ακτίνας N, υπάρχει μία ομοτοπία πάνω στη γ και έξω από την μπάλα ακτίνας r, που μεταφέρει το l στο εξωτερικό της μπάλας ακτίνας R.*

Ορισμός 4.4. *Έστω G μία πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα και $\widetilde{X_G}$ ο καθολικός χώρος επικάλυψης ενός πεπερασμένου συμπλέγματος του οποίου θεμελιώδης ομάδα είναι η G. Η συνάρτηση ανάπτυξης της ημιευστάθειας S_G, της G ως προς το $\widetilde{X_G}$, είναι:*

$$S_G = \sup\{S_e \mid e \text{ πέρας του } \widetilde{X_G}\}.$$

Ο ***ρυθμός ανάπτυξης της ημιευστάθειας*** *(semistability growth) της G είναι η κλάση ισοδυναμίας της συνάρτησης S_G.*

Σημειώνουμε ότι ο ρυθμός ανάπτυξης της ημιευστάθειας μιας πεπερασμένα παριστώμενης ομάδας είναι μία, καλά ορισμένη, ασυμπτωτική αναλλοίωτη των πεπερασμένα παριστώμενων ομάδων.

Ορισμός 4.5. *Έστω X ένας συνεκτικός τοπικά συμπαγής τοπικά απλά συνεκτικός τοπολογικός χώρος με τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα. Ο X είναι* ***απλά***

συνεκτικός στο άπειρο *(simply connected at infinity) αν για κάθε συμπαγές k υποσύνολο του X υπάρχει $K \subseteq X$ το οποίο περιέχει το k, και είναι τέτοιο ώστε κάθε κλειστό μονοπάτι στο εξωτερικό του K είναι ομοτοπικό, έξω από το k, με το τετριμμένο.*

Μία πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα G είναι απλά συνεκτική στο άπειρο αν ο καθολικός χώρος επικάλυψης κάποιου (ισοδύναμα οποιουδήποτε) πεπερασμένου συμπλέγματος, το οποίο έχει θεμελιώδη ομάδα την G, είναι απλά συνεκτικός στο άπειρο (δες επίσης [4]).

Ορισμός 4.6. *Η συνάρτηση ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο, $V_X(r)$, ενός απλά συνεκτικού στο άπειρο μετρικού χώρου X είναι σε κάθε r το infimal $N(r)$ με την ιδιότητα: για κάθε κλειστό μονοπάτι στο εξωτερικό της μπάλας ακτίνας $N(r)$ είναι ομοτοπικό, έξω από την μπάλα ακτίνας r, με το τετριμμένο.*

Έστω G μία απλά συνεκτική στο άπειρο ομάδα και $\widetilde{X_G}$ ο καθολικός χώρος επικάλυψης ενός πεπερασμένου συμπλέγματος του οποίου θεμελιώδης ομάδα είναι η G. Η συνάρτηση ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο, V_G, της G ως προς το $\widetilde{X_G}$ είναι ακριβώς η $V_{\widetilde{X_G}}$. Ο ***ρυθμός ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο*** *της G είναι η κλάση ισοδυναμίας της V_G.*

Ο ρυθμός ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο είναι μία, καλά ορισμένη, ασυμπτωτική αναλλοίωτη των απλά συνεκτικών στο άπειρο ομάδων (δες [13]).

4.3 Τα αποτελέσματά μας

Αρχικά δείχνουμε πως ακριβώς συνδέονται οι ρυθμοί ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο και της ημιευστάθειας:

Πρόταση 4.3 ([12]). *Έστω G μία πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα που είναι απλά συνεκτική στο άπειρο και ημιευσταθής. Τότε, $V_G = S_G$.*

Απόδειξη. Έστω $\widetilde{X_G}$ ο καθολικός χώρος επικάλυψης ενός πεπερασμένου συμπλέγματος του οποίου θεμελιώδης ομάδα είναι η G. Καθώς ο χώρος $\widetilde{X_G}$ είναι απλά συνεκτικός στο άπειρο, για κάθε r υπάρχει $N(r)$ ώστε κάθε κλειστό μονοπάτι στο $\widetilde{X_G} \smallsetminus B(N(r))$ είναι ομοτοπικό με το τετριμμένο, έξω από τη μπάλα $B(r)$. Έστω l ένα κλειστό μονοπάτι που δεν τέμνει την μπάλα $B(S_G(r))$. Καθώς η G είναι ημιευσταθής, μπορούμε να βρούμε μία ομοτοπία στο $\widetilde{X_G} \smallsetminus B(r)$ που στέλνει το l σε ένα κλειστό μονοπάτι l' που βρίσκεται στο $\widetilde{X_G} \smallsetminus B(N(r))$. Όμως το l' είναι ομοτοπικό με το τετριμμένο μονοπάτι έξω από την μπάλα $B(r)$ και άρα το ίδιο ισχύει και για το l. Έπεται ότι $V_G(r) \leq S_G(r)$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω l ένα κλειστό μονοπάτι με βάση το $p = \gamma(V_G(r) + \varepsilon)$ (για αυθαίρετα μικρό ε) και έξω από την μπάλα $B(V_G(r))$, όπου γ είναι μία δεδομένη γεωδαισιακή ακτίνα. Τότε το l είναι ομοτοπικό, έξω από τη μπάλα $B(r)$, με το τετριμμένο μονοπάτι βασισμένο στο σημείο p. Όμως μπορούμε να μεταφέρουμε με μία ομοτοπία το p κατά μήκος της γ όσο μακριά θέλουμε. Επομένως, $S_G(r) \leq V_G(r)$. □

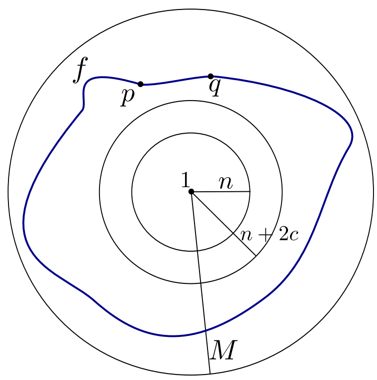
Βασικός στόχος της παραγράφου αυτής είναι να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 7 ([12])**.** *Ο ρυθμός ανάπτυξης της ημιευστάθειας μίας υπερβολικής ομάδας είναι γραμμικός.*

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε το Θεώρημα 7 στην περίπτωση που έχουμε μία υπερβολική ομάδα G με ένα πέρας. Έστω δ η σταθερά υπερβολικότητας για ένα Cayley σύμπλεγμα, X_G, της G, και έστω c η σταθερά που εμφανίζεται στην Πρόταση 4.1. Από την Πρόταση 4.2 και το γεγονός ότι δεν υπάρχουν καθολικά σημεία κοπής στο σύνορο έπεται ότι το X_G ικανοποιεί τη $\mathrm{Rel}(M)$ για κάποιο $M > 6c + 2\delta + 3$ με σταθερά $L > 2c + 4$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το X_G σχετίζεται με μία παράσταση της G η οποία περιέχει στο σύνολο των σχέσεών της όλες τις λέξεις μήκους μέχρι $2L + 4c$ οι οποίες ισούνται με το ουδέτερο στη G. Αν δεν αναφέρουμε διαφορετικά, οι μπάλες που θα θεωρούμε εδώ θα υποθέτουμε ότι έχουν κέντρο το ουδέτερο.

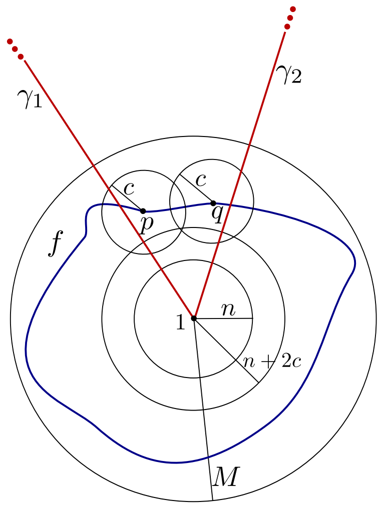
Έστω $n \in \mathbb{Z}_+$ και έστω γ μία γεωδαισιακή ακτίνα στο X_G η οποία ξεκινά από το ουδέτερο. Θα δείξουμε ότι κάθε κλειστό μονοπάτι f έξω από την μπάλα $B(n + 2c)$ και με βάση κάποιο σημείο $x \in \gamma$ μπορεί να μεταφερθεί οσοδήποτε μακριά θέλουμε, με μία ομοτοπία έξω από τη μπάλα $B(n)$ και πάνω στη γ.

Έστω p, q δύο διαδοχικές κορυφές του f και $r = d(p, 1) > n + 2c$.



Σχήμα 4.1: Το μονοπάτι f στο X_G.

Υπάρχουν μοναδιαίας ταχύτητας γεωδαισιακές ακτίνες γ_0 και γ_1 οι οποίες ξεκινούν από το ουδέτερο και απέχουν το πολύ c από τα p και q, αντίστοιχα.



Σχήμα 4.2: Το μονοπάτι f και οι γεωδαισιακές γ_1, γ_2 στο X_G.

Ακολουθώντας την Πρόταση 3.2 του [2] έχουμε:

Λήμμα 4.1. *Για κάθε ακέραιο $i \geqslant 0$, υπάρχει μονοπάτι f_i από το $\gamma_0(r+i)$ στο $\gamma_1(r+i)$, τέτοιο ώστε:*

1. *Το μονοπάτι f_i βρίσκεται έξω από τη μπάλα $B(r+i-c)$.*

2. *Για κάθε $j \in \{0, 1, \dots, L^i\}$, υπάρχει μία μοναδιαίας ταχύτητας γεωδαισιακή ακτίνα $\gamma_{\frac{j}{L^i}}$, η οποία ξεκινά από το ουδέτερο και είναι τέτοια ώστε:*

$$\gamma_{\frac{j}{L^i}}(r+i) \in f_i.$$

   Επιπλέον, για κάθε $j < L^i - 1$,

$$d\left(\gamma_{\frac{j}{L^i}}(r+i), \gamma_{\frac{j+1}{L^i}}(r+i)\right) \leq M.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο i. Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι $d(\gamma_0(r), p) \leq 2c$ και $d(\gamma_1(r), q) \leq 2c + 1$, άρα $d(\gamma_0(r), \gamma_1(r)) \leq 4c + 2 < M$. Σύμφωνα με τη $\mathrm{Rel}(M)$, υπάρχει μονοπάτι f_0 έξω από τη μπάλα $B(r - c)$, το οποίο είναι μήκους το πολύ L και ενώνει τα $\gamma_0(r)$ και $\gamma_1(r)$, και άρα το συμπέρασμα ισχύει για $i = 0$.

Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για $i \geq 0$. Σύμφωνα με τη $\mathrm{Rel}(M)$, για κάθε $j \in \{0, 1, \ldots, L^i - 1\}$, υπάρχει μονοπάτι $\alpha_j : [0, L] \to X_G$ έξω από τη μπάλα $B(r + i - c)$, το οποίο έχει το πολύ μοναδιαία ταχύτητα και ενώνει τα $\gamma_{\frac{j}{L^i}}(r + i)$ και $\gamma_{\frac{j+1}{L^i}}(r + i)$.

Για κάθε $k \in \{1, \ldots, L - 1\}$, υπάρχει γεωδαισιακή ακτίνα γ'_k, η οποία ξεκινά από το ουδέτερο και απέχει το πολύ c από το $\alpha_j(k)$. Έστω $y_k \in \gamma'_k$, κοντινότερο σημείο της γ'_k στο $\alpha_j(k)$. Τότε $d(y_k, \alpha_j(k)) \leq c$, και άρα $d(y_k, 1) \geq r + i - 2c$. Επομένως, υπάρχει $z_k \in \gamma'_k$ τέτοιο ώστε $d(z_k, 1) \geq r+i+1$ και $d(z_k, y_k) \leq 2c+1$. Συνεπώς, $d(z_k, z_{k+1}) \leq 6c + 3$. Καθώς το γεωδαισιακό τρίγωνο με κορυφές τα $1, z_k, z_{k+1}$ είναι δ-λεπτό, έχουμε:

$$d(\gamma'_k(r + i + 1), \gamma'_{k+1}(r + i + 1)) \leq 6c + 2\delta + 3 < M.$$

Σύμφωνα με τη $\mathrm{Rel}(M)$ υπάρχει μονοπάτι έξω από τη μπάλα $B(r + i + 1 - c)$, το οποίο ενώνει τα $\gamma'_k(r + i + 1)$, $\gamma'_{k+1}(r + i + 1)$ και έχει μήκος το πολύ L. Η παράθεση των μονοπατιών αυτών, για όλα τα k, μας δίνει το ζητούμενο μονοπάτι f_{i+1}. Θέτουμε $\gamma_{\frac{jL+k}{L^{i+1}}}$ να είναι η γεωδεσιακή ακτίνα γ'_k, ολοκληρώνοντας έτσι το επαγωγικό βήμα. Σημειώνουμε ότι:

$$\ell([\gamma_{\frac{j}{L^i}}(r + i), \gamma_{\frac{j+1}{L^i}}(r + i)]_{f_i}) \leq L.$$

□

Έστω P, Q δύο γεωδαισιακά μονοπάτια που ενώνουν τα p, q με τα $\gamma_0(r)$, $\gamma_1(r)$, αντίστοιχα. Για κάθε $N \geq 0$, έστω $\Phi_N(p,q)$ το κλειστό προσανατολισμένο μονοπάτι που παίρνουμε παραθέτοντας τα: P, $\gamma_0([r, r+N])$, f_N, $\gamma_1([r, r+N])^{-1}$, Q^{-1} και την ακμή qp.

Λήμμα 4.2. *Το κλειστό μονοπάτι $\Phi_N(p,q)$ είναι, για κάθε $N \geq 0$, ομοτοπικό με το τετριμμένο, έξω από την μπάλα $B(n)$.*

Απόδειξη. Το κλειστό μονοπάτι $\Phi_0(p,q)$ έχει μήκος το πολύ $L + 4c + 2$ και βρίσκεται έξω από τη μπάλα $B(r-c-1)$. Από την υπόθεσή μας για την παράσταση της ομάδας, το $\Phi_0(p,q)$ γεμίζει από ένα 2-κελί A_0 στο σύμπλεγμα Cayley, και άρα το συμπέρασμα ισχύει για $N = 0$.

Για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, έστω Φ_i το μονοπάτι που προκύπτει από παράθεση των μονοπατιών $\gamma_0([r+i, r+i+1])$, f_{i+1}, $\gamma_1([r+i, r+i+1])^{-1}$, και f_i^{-1}. Τότε, το $\Phi_N(p,q)$ είναι ομοτοπικό με το γινόμενο των μονοπατιών $\Phi_0(p,q)$ και $\Phi_0\Phi_1 \cdots \Phi_{N-1}$. Μπορούμε να διασπάσουμε περαιτέρω κάθε Φ_i ως σύνθεση των κλειστών μονοπατιών $\Phi_i(j)$, το κάθε ένα των οποίων αποτελείται από την παράθεση των παρακάτω μονοπατιών: $\gamma_{\frac{j}{L^i}}([r+i, r+i+1])$, $[\gamma_{\frac{j}{L^i}}(r+i+1), \gamma_{\frac{j+1}{L^i}}(r+i+1)]_{f_{i+1}}$, $\gamma_{\frac{j+1}{L^i}}([r+i, r+i+1])^{-1}$, και $[\gamma_{\frac{j}{L^i}}(r+i), \gamma_{\frac{j+1}{L^i}}(r+i)]_{f_i}^{-1}$.

Θυμίζουμε ότι στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος δείξαμε ότι $\ell([\gamma_{\frac{j}{L^i}}(r+i), \gamma_{\frac{j+1}{L^i}}(r+i)]_{f_i}) \leq L$. Για κάθε i, j, έστω $\alpha_j : [0, L] \to X_G$ ένα μονοπάτι με εικόνα:

$$a_j([0, L]) = [\gamma_{\frac{j}{L^i}}(r+i), \gamma_{\frac{j+1}{L^i}}(r+i)]_{f_i}.$$

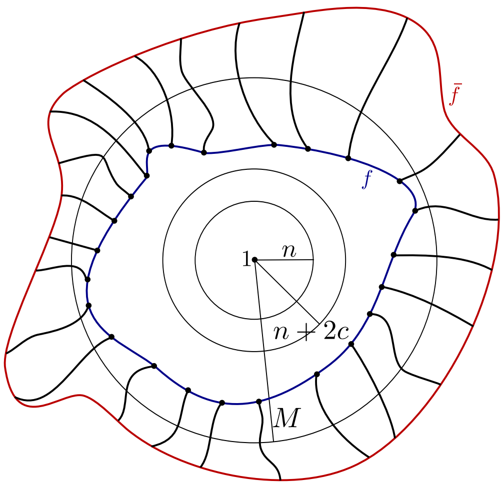
Συνεπώς, το a_j είναι έξω από τη μπάλα $B(r+i-c)$ και έχει το πολύ μοναδιαία ταχύτητα. Για κάθε $k \in \{0, \dots, L-1\}$, έστω y_k ένα σημείο στη γεωδαισιακή $\gamma'_k = \gamma_{\frac{jL+k}{L^{i+1}}}$ κοντινότερο στο $a_j(k)$, και β_k ένα γεωδαισιακό μονοπάτι που ενώνει τα $\alpha_j(k)$ και y_k. Τότε, $d(y_k, a_j(k)) \leq c$ και

$$r + i - 2c \leq d(y_k, 1) \leq \frac{L}{2} + r + i + c.$$

Επομένως, $d(y_k, \gamma'_k(r+i+1)) \leq \frac{L}{2} + c + 1$ και το μονοπάτι $[y_k, \gamma'_k(r+i+1)]_{\gamma'_k}$ βρίσκεται έξω από τη μπάλα $B(r+i-2c)$. Έπεται ότι το κλειστό μονοπάτι που παίρνουμε από την παράθεση των μονοπατιών β_k, $[y_k, \gamma'_k(r+i+1)]_{\gamma'_k}$, $[\gamma'_k(r+i+1), \gamma'_{k+1}(r+i+1)]_{f_{i+1}}$, $[\gamma'_{k+1}(r+i+1), y_{k+1}]_{\gamma'_{k+1}}$, β_{k+1}, και $[\alpha_j(k), \alpha_j(k+1)]_{\alpha_j}$ έχει μήκος το πολύ $2L + 4c - 1$ και βρίσκεται έξω από τη μπάλα $B(r+i-2c)$. Οπότε, γεμίζει ένα 2-κελί $A_{i,j}(k)$ στο σύμπλεγμα Cayley και έξω από τη μπάλα $B(n)$. Η ένωση αυτών των 2-κελιών $A_{i,j} = \cup_{k \in \{0,\dots,L-1\}} A_{i,j}(k)$ είναι η εικόνα ενός δίσκου που γεμίζει το κλειστό μονοπάτι $\Phi_i(j)$, έξω από τη μπάλα $B(n)$. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. □

Η σύνθεση όλων αυτών των μονοπατιών $\Phi_N(p,q)$, για διαδοχικές κορυφές p, q του κλειστού μονοπατιού f είναι ομοτοπική έξω από τη μπάλα $B(n)$ με ένα κλειστό μονοπάτι που αποτελείται από την παράθεση μονοπατιών της μορφής f_N, εκ΄των οποίων καθένα βρίσκεται έξω από τη μπάλα $B(r+N-c)$. Έπεται ότι για κάθε $N \geq 0$ υπάρχει μία ομοτοπία πάνω στη γ και έξω από τη μπάλα $B(n)$, από το αρχικό κλειστό μονοπάτι $f \subset X_G \setminus B(n+2c)$ σε ένα κλειστό μονοπάτι $\bar{f}$ που βρίσκεται στο $X_G \setminus B(r+N-c)$.

Στην περίπτωση που η G έχει περισσότερα από ένα πέρατα, δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο στις συνεκτικές συνιστώσες του $X_G \setminus B(n+2c)$. □



Σχήμα 4.3: Το μονοπάτι $\bar{f}$.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 7 με την Πρόταση 4.3 καταλήγουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 8 ([12]). *Έστω G μια υπερβολική ομάδα η οποία είναι απλά συνεκτική στο άπειρο. Ο ρυθμός ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας της G στο άπειρο είναι γραμμικός.*

Κεφάλαιο 5

Ανάπτυξη και πέρατα

Ο αριθμός των περάτων μίας ομάδας είναι μία γνωστή και εκτενώς μελετημένη αναλλοίωτη των πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων. Έτσι, η μελέτη των περάτων έχει σημαντικό ρόλο στη γεωμετρική θεωρία ομάδων, και ιδιαιτέρως στην κατανόηση αλλά και κατηγοριοποίηση των πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων όσον αφορά τη γεωμετρία τους σε μεγάλη κλίμακα (large scale geometry). Στην Παράγραφο 5.1 διατυπώνουμε μία γεωμετρική συνθήκη για μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, που θα συνεπάγεται ότι η ομάδα έχει περισσότερα από ένα πέρατα. Στη συνέχεια, στην Παράγραφο 5.2, μελετάμε μία αναλλοίωτη κάτω από σχεδόν-ισομετρίες, την ανάπτυξη της συνάρτησης βάθους πέρατος, σε ομάδες με ένα πέρας.

5.1 Ομάδες με περισσότερα από ένα πέρατα

Ο στόχος της Παραγράφου αυτής είναι να δώσουμε μία γεωμετρική συνθήκη πάνω σε ένα Cayley γράφημα μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας, η οποία θα εξασφαλίζει ότι η ομάδα θα έχει περισσότερα από ένα πέρατα. Τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούμε είναι γεωμετρικά και στοιχειώδη, ενώ άλλες προσεγγίσεις που υπάρχουν πάνω σε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούν πιο δυνατά εργαλεία όπως την ισοπεριμετρική ανισότητα του Βαρόπουλου ή σύνολα κοπής (cutsets).

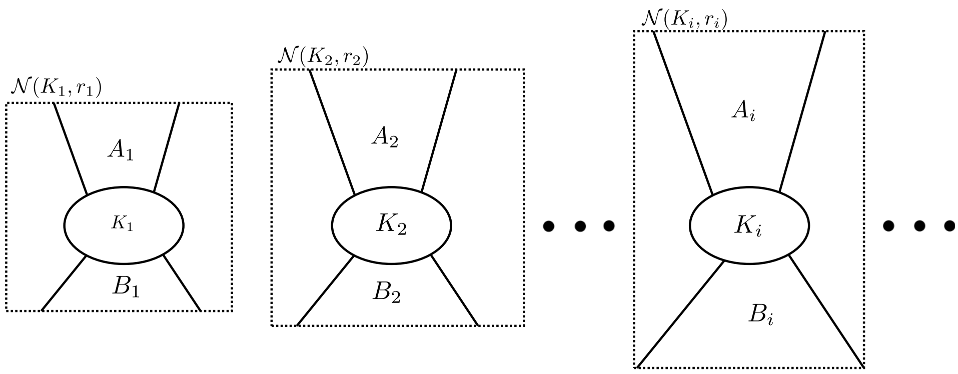
Αρχικά δείχνουμε μία βοηθητική πρόταση, ότι αν ένα Cayley γράφημα μίας ομάδας έχει, κατά μία έννοια, ασυμπτωτικά περισσότερα από ένα πέρατα τότε έχει περισσότερα από ένα πέρατα.

Πρόταση 5.1 ([14]). *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα και X ένα Cayley γράφημά της. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $n > 0$ και μία ακολουθία φυσικών $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ να υπάρχει συμπαγές $K_i \subset X$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\operatorname{diam}(K_i) < n$,
2. *το $\mathcal{N}(K_i, r_i) \smallsetminus K_i$ έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες A_i και B_i, και*
3. $\lim_{i\to\infty} r_i = \lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(A_i) = \lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(B_i) = \infty$.

Τότε $e(G) > 1$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι για κάθε $i > 0$, το K_i είναι γράφημα. Έστω ότι S είναι το πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G το οποίο κατασκευάζει το X. Καθώς το σύνολο K_i έχει διάμετρο μικρότερη του n, ο αριθμός των ακμών στο K_i είναι μικρότερος του $|S|^{2n}$. Επομένως, υπάρχει υπακολουθία $\{K_i\}_i$ με την επιπλέον ιδιότητα ότι κάθε δύο στοιχεία της είναι ισομετρικά σύνολα. Περνώντας σε μία τέτοια υπακολουθία, μπορούμε να



Σχήμα 5.1: Εικονοποίηση της Πρότασης 5.1

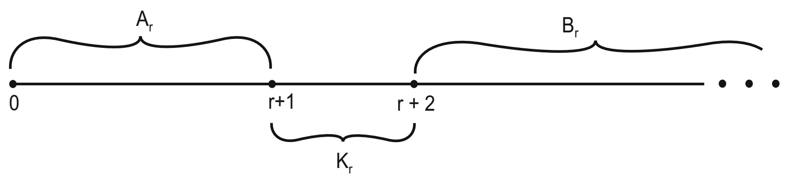
θεωρούμε ότι η αρχική μας ακολουθία έχει την ιδιότητα αυτή. Επιπλέον, αφού η δράση της G στο X είναι με ισομετρίες, περνώντας περαιτέρω σε μία υπακολουθία μπορούμε να θεωρούμε ότι για κάθε $i > 0$, υπάρχει $g_i \in G$ ώστε $g_i K_i = K_1$. Καθώς $\operatorname{diam}(K_i) < n$ και η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών του $X \smallsetminus K_i$ είναι πεπερασμένος και μάλιστα ομοιόμορφα φραγμένος για όλα τα i. Συνεπώς, περνώντας περαιτέρω σε μία υπακολουθία της $\{K_i\}_i$, μπορούμε να θεωρούμε ότι υπάρχουν ακολουθίες $\{A_i\}_i$ και $\{B_i\}_i$ υποσυνόλων του X ώστε για κάθε i τα A_i και B_i είναι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathcal{N}(K_i, r_i) \smallsetminus K_i$ και:

$$U = \bigcap_{i>1} g_i A_i \cap A_1 \neq \emptyset \quad , \quad W = \bigcap_{i>1} g_i B_i \cap B_1 \neq \emptyset.$$

Έστω A, B δύο συνεκτικές συνιστώσες του $X \smallsetminus K_1$ και τέτοιες ώστε $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$. Τότε, για κάθε i, έχουμε ότι $g_i A_i \subset A$. Επομένως, $\operatorname{diam}(A) \geqslant \operatorname{diam}(A_i)$, και άρα $\operatorname{diam}(A) = \infty$. Ομοίως συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{diam}(B) = \infty$.

Θα δείξουμε, χρησιμοποιώντας απαγωγή εις άτοπο, ότι τα A και B είναι διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $X \smallsetminus K_1$. Υποθέτουμε λοιπόν, προς άτοπο, ότι $A = B$. Έστω $x \in U$, $y \in W$. Υπάρχει ένα πεπερασμένο μονοπάτι γ στο $X \setminus K_1$ που ενώνει τα x και y. Αφού $\lim_{i\to\infty} r_i = \infty$, έπεται ότι για αρκετά μεγάλα i, το μονοπάτι $g_i^{-1}\gamma$ περιέχεται στην $\mathcal{N}(K_i, r_i)$. Συνεπώς, το μονοπάτι $g_i^{-1}\gamma$ ενώνει τα $x_i = g_i^{-1}x \in A_i$ και $y_i = g_i^{-1}y \in B_i$ στο εσωτερικό της $\mathcal{N}(K_i, r_i)$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, το K_1 είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X και τέτοιο ώστε το $X \setminus K_1$ να έχει τουλάχιστον δύο μη φραγμένες συνεκτικές συνιστώσες, άρα $e(G) > 1$. $\square$

Παρατήρηση 5.1. *Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η Πρόταση 5.1 δεν ισχύει για τυχαίους μετρικούς χώρους. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον χώρο $X = [0, \infty)$ με τη συνήθη μετρική. Ο χώρος X έχει ένα πέρας ενώ μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης 5.1:*
Για κάθε $r \in \mathbb{N}$, θέτουμε $K_r = [r+1, r+2]$. Τότε, για κάθε $r \in \mathbb{N}$, το K_r είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X με $\operatorname{diam}(K_r) < 2$. Επιπλέον, οι συνεκτικές συνιστώσες του $X \setminus K_r$ είναι τα σύνολα $A_r = [0, r+1)$ και $B_r = (r+2, \infty)$, όπου $\operatorname{diam}(A_r) > r$ και $\operatorname{diam}(B_r) = \infty$.



Σχήμα 5.2: Παράδειγμα μετρικού χώρου για τον οποίο δεν ισχύει η Πρόταση 5.1.

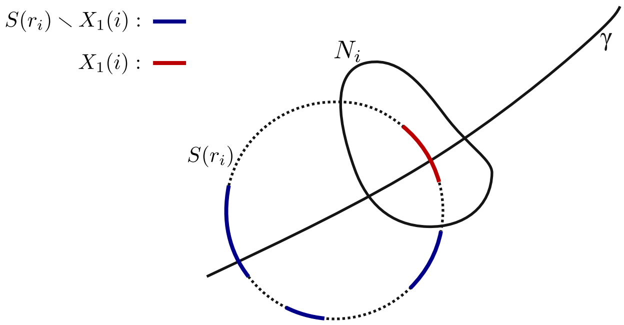
Θεώρημα 9 ([14]). *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα και X ένα Cayley γράφημά της. Αν για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $r_i, t_i \in \mathbb{N}$, και μία συλλογή $\{X_k(i)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων της σφαίρας $S(1, r_i)$, όπου όλα εκτός πεπερασμένων είναι κενά, τέτοια ώστε:*

1. $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = \lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$,
2. *για κάθε* $i \in \mathbb{N}$, $S(1, r_i) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k(i)$,
3. *υπάρχει* $c > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $i, k \in \mathbb{N}$, *έχουμε* $\operatorname{diam}(X_k(i)) < c$, *και*
4. *για κάθε* $i, k \in \mathbb{N}$, *αν* d_i *είναι η απόσταση έξω από τη μπάλα με κέντρο το ουδέτερο και ακτίνα* $r_i - 1$, *και* $X_k(i) \neq \emptyset$ *ισχύει ότι*

$$\inf\{d_i(X_k(i), X_l(i)) \mid l \in \mathbb{N} \setminus \{k\},\, X_l(i) \neq \emptyset\} \geqslant t_i,$$

τότε $e(G) > 1$.

Απόδειξη. Καθώς η G είναι άπειρη, υπάρχει μία διπλά άπειρη γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας γ στο X με $\gamma(0) = 1$, το ουδέτερο της G. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε $\gamma(r_i) \in X_1(i)$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έστω N_i η $\frac{t_i}{2}$-γειτονιά του $X_1(i)$.



Σχήμα 5.3: Εικονοποίηση για το τυχαίο i.

Τότε, το σύνολο $N_i \setminus X_1(i)$ έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες, A_i και B_i με:

$$\gamma\left((r_i - \frac{t_i}{2} + 1, r_i)\right) \subseteq A_i \neq \emptyset \text{ και } \gamma((r_i, r_i + \frac{t_i}{2} - 1)) \subseteq B_i \neq \emptyset$$

Έπεται ότι $\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(A_i), \lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(B_i) \geq \lim_{i\to\infty} t_i = \infty$. Συνεπώς, ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις της Πρότασης 5.1, και άρα $e(G) > 1$. □

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 9, εύκολα βλέπουμε ότι το Θεώρημα ισχύει ακόμα και αν επιτρέψουμε σε ένα μόνο από τα $X_k(i)$ να έχει αυθαίρετα μεγάλη διάμετρο, αρκεί ο αριθμός των των συνιστωσών που αντιστοιχούν σε κάθε σφαίρα να είναι τουλάχιστον δύο. Καταλήγουμε λοιπόν στην παρακάτω εναλλακτική διατύπωση του θεωρήματος:

Θεώρημα 10 ([14]). *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα και X ένα Cayley γράφημά της. Αν υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες φυσικών $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, και ακολουθία $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του X, με $X_i \subseteq S(r_i)$ και τέτοια ώστε:*

1. *Υπάρχει μία γεωδαισιακή ακτίνα που ξεκινάει από το ουδέτερο και τέμνει κάθε X_i,*
2. *υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$, να ισχύει ότι $\operatorname{diam}(X_i) < c$, και*
3. *Αν d_i είναι η απόσταση έξω από τη μπάλα με κέντρο το ουδέτερο και ακτίνα $r_i - 1$, τότε $\lim_{i\to\infty} d_i(X_i, S(r_i)\setminus X_i) = \infty$,*

τότε $e(G) > 1$.

Χρησιμοποιώντας την κατηγοριοποίηση των ομάδων με βάση των αριθμό των περάτων τους, καταλήγουμε στην παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 5.2 ([14]). *Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα και X ένα Cayley γράφημά της. Αν υπάρχει μία ακολουθία πραγματικών $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\lim_{i\to\infty} r_i = \infty$ και $\limsup_{i\to\infty} |S(1, r_i)| < \infty$, τότε η G είναι σχεδόν κυκλική.*

Σημειώνουμε ότι η Πρόταση 5.2 απαντά θετικά στην Ερώτηση VI.19 που διατύπωσε ο Pierre de la Harpe στο [20]. Δηλαδή, στο αν είναι αληθές ότι μία άπειρη ομάδα G περιέχει μία άπειρη κυκλική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη αν υπάρχει σε κάποιο Cayley γράφημά της μία ακολουθία σφαιρών των οποίων οι ακτίνες τείνουν στο άπειρο, ενώ το supremum του πληθάριθμού τους είναι πραγματικός αριθμός. Μία θετική απάντηση σε αυτό έδωσε αρχικά η Erschler [20], χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα του Βαρόπουλου και την εκδοχή των Van den Dries και Wilkie [35] του θεωρήματος πολυωνυμικής ανάπτυξης του Gromov. Άλλη μία απόδειξη δόθηκε από τον Timar [32], με χρήση συνόλων κοπής.

Απόδειξη της Πρότασης 5.2. Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων με βάση τον αριθμό των περάτων τους, αρκεί να αποδείξουμε ότι $e(G) = 2$. Εφόσον η ακολουθία $\{|S(r_i)|\}_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, έπεται ότι είναι φραγμένη και άρα $e(G) < \infty$. Από την άλλη, η G είναι άπειρη οπότε το $e(G)$ είναι είτε 1 ή 2. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι $e(G) \geq 2$.

Καθώς η $\{S(r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μία συγκλίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, περνώντας σε μία υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι στην πραγματικότητα σταθερή. Επομένως, υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, να ισχύει ότι $|S(r_i)| = m$. Ιδιαιτέρως, έστω ότι $S(r_i) = \{x_1(i), x_2(i), \ldots, x_m(i)\}$. Αφού η G είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα, υπάρχει μία διπλά άπειρη γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας γ στο X με $\gamma(0) = 1$, το ουδέτερο στοιχείο της G. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι για κάθε $i > 0$, έχουμε ότι $x_1(i) = \gamma(r_i)$ και $x_m(i) = \gamma(-r_i)$.

Χρησιμοποιώντας ένα διαγώνιο επιχείρημα, μπορούμε να βρούμε μία υπακολουθία $\{r_{i_j}\}_j$, τέτοια ώστε για κάθε $k, l \in \{1, \ldots, m\}$, η ακολουθία $\{d(x_k(i_j), x_l(i_j))\}_j$ να συγκλίνει στο $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό μας, επαναριθμούμε τους δείκτες της ακολουθίας αυτής ώστε να γράφουμε r_j αντί για r_{i_j}. Τότε, για κάθε $k, l \in \{1, \ldots, m\}$ με $k \leq l$ έχουμε:

$$\lim_{j \to \infty} d(x_k(j), x_l(j)) = a_{kl} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε μία διαμέριση $\mathcal{P}$ του συνόλου $\{1, \ldots, m\}$ με τη συνθήκη ότι τα $k, l \in \{1, \ldots, m\}$ ανήκουν στο ίδιο σύνολο της διαμέρισης αν και μόνο αν $a_{kl} < \infty$. Σημειώνουμε ότι καθώς $a_{1m} = \lim_{j \to \infty} d(\gamma(r_j), \gamma(-r_j)) = \infty$, η διαμέριση $\mathcal{P}$ δεν μπορεί να είναι μονοσύνολο. Για κάθε $Y \in \mathcal{P}$ και $j \in \mathbb{N}$, έστω $Y_j = \{x_k(j) \mid k \in Y\}$, οπότε $\lim_{j \to \infty} \operatorname{diam}(Y_j) = \max\{a_{k,l} \mid k, l \in Y\} < \infty$. Άρα, υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και $Y \in \mathcal{P}$, έχουμε ότι $\operatorname{diam}(Y_j) \leq c$. Επιπλέον, προφανώς ισχύει ότι $\lim_{j \to \infty} \inf\{d(Y_j, Z_j) \mid Z \in \mathcal{P} \smallsetminus Y\} = \infty$ και για κάθε $j \in \mathbb{N}$, $S(r_j) = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}} Y_j$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9 και αφού $e(G) < \infty$, έπεται ότι $e(G) = 2$. □

5.2 Βάθος πέρατος

Η απλή συνεκτικότητα στο άπειρο που ορίσαμε και μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 4, καθώς και ο ρυθμός ανάπτυξής της είναι μονοδιάστατες αναλλοίωτες στο άπειρο για μια ομάδα G, υπό την έννοια ότι πραγματεύονται κλειστά μονοπάτια και δίσκους. Το μηδενοδιάστατο ανάλογο της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο είναι η συνεκτικότητα στο άπειρο, δηλαδή η έννοια των χώρων με ένα πέρας. Έτσι, θα μπορούσαμε να προσαρμόσουμε την συνεκτικότητα στο άπειρο στην ανάπτυξη ενός πέρατος. Η ιδέα αυτή μπορεί να αποδοθεί στους Cleary και Riley (δες [6]).

Οδηγούμαστε λοιπόν στον παρακάτω ορισμό, ως το μηδενοδιάστατο ανάλογο της ανάπτυξης της απλής συνεκτικότητας στο άπειρο:

Ορισμός 5.1. *Έστω X ένας μετρικός χώρος με ένα πέρας. Η **συνάρτηση βάθους - πέρατος** (end-depth function), $V_0(X)$, του X στο r είναι το infimal $N(r)$ με την ιδιότητα: κάθε δύο σημεία που βρίσκονται έξω από την μπάλα $B(N(r))$ μπορούν να ενωθούν με ένα μονοπάτι έξω από την μπάλα $B(r)$. Το **βάθος - πέρατος** (end-depth) του X είναι η κλάση ισοδυναμίας της συνάρτησης βάθους - πέρατος.*

Το βάθος - πέρατος μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας G με ένα πέρας είναι το βάθος - πέρατος κάποιου (ισοδύναμα οποιοδήποτε) Cayley γραφήματος της ομάδας, ως προς ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων. Το βάθος - πέρατος είναι μία, καλά ορισμένη, αναλλοίωτη κάτω από σχεδόν-ισομετρίες των πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων [27].

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε, με τον ίδιο τρόπο, το βάθος - πέρατος ενός πέρατος ενός χώρου ή μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας που έχει περισσότερα από ένα πέρατα.

Παραδείγματα ομάδων των οποίων τα Cayley γραφήματα έχουν αδιέξοδα, δηλαδή γραφημάτων των οποίων η συνάρτηση βάθους - πέρατος είναι για κάθε r αυστηρά μεγαλύτερη από $r + c$, για κάθε c, μπορεί να δει κανείς στο [6].

Το αποτέλεσμά μας δείχνει ότι ο ρυθμός ανάπτυξης του βάθους - πέρατος δεν έχει ουσιαστικό ενδιαφέρον:

Πρόταση 5.3. *[12] Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα με ένα πέρας έχει γραμμικό βάθους - πέρατος. Συγκεκριμένα, αν X είναι το Cayley γράφημα μίας* *πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας ως προς ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων, και $V(r)$ είναι η συνάρτηση βάθους - πέρατος αυτού, τότε για αρκετά μεγάλα $r > 0$, ισχύει ότι $V(r) \leqslant 2r$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει θετικός ακέραιος $r \geqslant 2$, τέτοιος ώστε $V_0(r) > 2r$. Τότε, υπάρχει μία φραγμένη συνεκτική συνιστώσα, A, του $X \setminus B(r)$ και $a \in A$ ώστε $d(a, B(r)) > r$. Καθώς η G έχει ένα πέρας, υπάρχει μία μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα, C, του $X \setminus B(r)$. Θεωρούμε τη δράση του στοιχείου a στο X δια της πράξης της ομάδας. Εφόσον $d(a, B(r)) > r$, προφανώς $aB(r) = B(a, r) \subset A$ και υπάρχουν $x \in A$, $y \in C$ τέτοια ώστε $ax, ay \in B(r)$. Εδώ με $B(a, r)$ συμβολίζουμε τη μπάλα στο X με ακτίνα r και κέντρο το a. Συνεπώς υπάρχει ένα μονοπάτι γ στην μπάλα $B(r)$ το οποίο ενώνει τα ax και ay. Τότε, το μονοπάτι $a^{-1}\gamma$ ενώνει ένα στοιχείο του A με ένα στοιχείο της C, και άρα θα πρέπει να τέμνει την μπάλα $B(r)$. Επομένως, υπάρχει w στο γ τέτοιο ώστε $a^{-1}w \in B(r)$. Έπεται ότι $w \in B(r) \cap aB(r)$ το οποίο είναι άτοπο.

Έχουμε λοιπόν ότι $V_0(r) \leqslant 2r$ και άρα το βάθους - πέρατος της G είναι γραμμικό. $\square$

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] L. Babai and M. Szegedy, *Local Expansion of Symmetrical graphs*, Combin. Probab. and Computing 1 (1992), 1-11.

[2] M. Bestvina and G. Mess, *The boundary of negatively curved groups*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 469–481.

[3] B. Bowditch, *Connectedness properties of limit sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1999), 3673–3686.

[4] S. G. Brick, *Quasi-isometries and ends of groups*, J. Pure Appl. Algebra 86 (1993), 23–33.

[5] M. R. Bridson, A. Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature, Grundlehren Math. Wiss., vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[6] S. Cleary and T. Riley, *A finitely presented group with unbounded dead-end depth*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 343–349, *Erratum*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 2641–2645.

[7] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser (1980).

[8] T. Coulhon and L. Shaloff-Coste, *Isopérimétrie por les groupes et les variétés*, Rev. Math. Iber. 9 (1993), 293-314.

[9] M. DeVos and B. Mohar, *Small Separations in Vertex Transitive Graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics 24 (2006), 165-172.

[10] M. DeVos and B. Mohar, *Small Separations in Vertex Transitive Graphs*, arXiv:1110.4885v1 [math.CO] (2011).

[11] A. Eskin, D. Fisher and K. Whyte, *Coarse differentiation of quasiisometries I: Spaces not quasi-isometric to Cayley graphs*, Ann. Math. 176, no. 1 (2012), 221-260.

[12] L. Funar, M. Giannoudovardi and D. E. Otera, *On groups with linear sci growth*, To appear in Fundamenta Mathematicae.

[13] L. Funar and D. E. Otera, *A refinement of the simple connectivity at infinity of groups*, Archiv Math. (Basel) 81(2003), 360-368.

[14] M Giannoudovardi, *On small separations in Cayley and vertex transitive graphs*, Submitted for publication.

[15] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric Group Theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), London Mathematical Society Lecture Note Series, 182, Cambridge University Press, Cambridge, 1993,1–295.

[16] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. IHÉS 53 (1981), 53-73.

[17] M Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, New York, 75–263 .

[18] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser (2001).

[19] R. Halin, *Über unendliche Wege in Graphen*, Math. Ann. 157 (1964), 125-137.

[20] P. de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, University of Chicago Press (2000).

[21] H. Hopf, *Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen*, Comment. Math. Helv. 16 (1944), 81-100.

[22] W. Imrich and N. Seifter, *A bound for groups of linear growth*, Arch. Math. 48 (1987), 100-104.

[23] W. Imrich and N. Seifter, *A note on the growth of transitive graphs*, Discrete Math. 73 (1988/89), 111-117.

[24] J. Lee and Y. Makarychev, *Eigenvalue multiplicity and volume growth*, preprint.

[25] M. L. Mihalik and S. T. Tschantz, *Semistability of amalgamated products, HNN-extensions, and all one-relator groups*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 26 (1992), 131–135.

[26] M. Mihalik, *Semistability of Artin and Coxeter groups*, J.Pure Appl. Algebra 11 (1996), 205–211.

[27] D. E. Otera, *Some remarks on the ends of groups*, Acta Universitatis Apulensis 15 (2008), 133–146.

[28] Y. Shalom and T. Tao, *A finitary version of Gromov's Polynomial growth theorem*, arXiv:0910.4148v2 [math.GR] (2010).

[29] J. R. Stallings, *On torsion-free groups with infinitely many ends*, Ann. of Math., 88 (1968), 312 - 334.

[30] E. L. Swenson, *A cut point theorem for* CAT(0) *groups*, J. Differential Geom. 53 (1999), 327–358.

[31] G. Swarup, *On the cut point conjecture*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2 (1996), 98–100.

[32] A. Timar, *Cutsets in Infinite Graphs*, Combinatorics, Probability and Computing 16, issue 1 (2007), 1155 - 1163.

[33] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste and T. Coulhon *Analysis and Geometry on Groups*, Camb. Univ. Press, Cambridge (1992).

[34] A. J. Wilkie and L. Van Den Dries, *An effective bound for groups of linear growth*, Arch. Math. 42 (1984), 391-396.

[35] A. J. Wilkie and L. Van Den Dries, *On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic*, J. of Algebra 89 (1984),349–374.