Το φασματικό πρόβλημα σε μια διανισοτροπική κοιλότητα

Ευτυχία Η. Αργυροπούλου, Ανδρέας Δ. Ιωαννίδης

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Linnaeus University, Σουηδία

ΕΜΕ 2013, Καρδίτσα

Το σημείο εκκίνησης είναι το χρονικά αρμονικό σύστημα Maxwell χωρίς πηγές (η χρονική εξάρτηση λαμβάνεται ως $e^{-i\omega t}$.)

$$i\omega D = -\operatorname{curl} H, \text{ (Ampere's law)} \tag{1}$$

$$i\omega B = \operatorname{curl} E. \text{ (Faraday's law)} \tag{2}$$

Το σημείο εκκίνησης είναι το χρονικά αρμονικό σύστημα Maxwell χωρίς πηγές (η χρονική εξάρτηση λαμβάνεται ως $e^{-i\omega t}$.)

$$i\omega D = -\operatorname{curl} H, \text{ (Ampere's law)} \tag{1}$$

$$i\omega B = \operatorname{curl} E. \text{ (Faraday's law)} \tag{2}$$

$$E, H \in \mathbb{C}^3, r \in \Omega$$

$$\omega > 0$$

Έστω χωρίο Ω που καταλαμβάνεται από ένα διανισοτροπικό υλικό.

Έστω χωρίο Ω που καταλαμβάνεται από ένα διανισοτροπικό υλικό.

Διανισοτροπικά υλικά: οπτικά ενεργά, με την έννοια ότι μπορούν να στρέψουν το πεδίο πόλωσης του φωτός είτε κατά τη μετάδοση είτε κατά τη διάθλαση. Αυτό είναι απόρροια του ότι το ηλεκτρικό πεδίο συμβάλλει στη μαγνητική διέγερση.

Έστω χωρίο Ω που καταλαμβάνεται από ένα διανισοτροπικό υλικό.

Διανισοτροπικά υλικά: οπτικά ενεργά, με την έννοια ότι μπορούν να στρέψουν το πεδίο πόλωσης του φωτός είτε κατά τη μετάδοση είτε κατά τη διάθλαση. Αυτό είναι απόρροια του ότι το ηλεκτρικό πεδίο συμβάλλει στη μαγνητική διέγερση.

Θεωρούμε την πλέον γενική περίπτωση ενός γραμμικού μέσου όπου οι καταστατικές εξισώσεις είναι

$$D = \varepsilon E + \boldsymbol{\xi} H, \tag{3}$$

$$B = \boldsymbol{\zeta} E + \boldsymbol{\mu} H. \tag{4}$$

Έστω χωρίο Ω που καταλαμβάνεται από ένα διανισοτροπικό υλικό.

Διανισοτροπικά υλικά: οπτικά ενεργά, με την έννοια ότι μπορούν να στρέψουν το πεδίο πόλωσης του φωτός είτε κατά τη μετάδοση είτε κατά τη διάθλαση. Αυτό είναι απόρροια του ότι το ηλεκτρικό πεδίο συμβάλλει στη μαγνητική διέγερση.

Θεωρούμε την πλέον γενική περίπτωση ενός γραμμικού μέσου όπου οι καταστατικές εξισώσεις είναι

$$D = \varepsilon E + \boldsymbol{\xi} H, \tag{3}$$

$$B = \boldsymbol{\zeta} E + \boldsymbol{\mu} H. \tag{4}$$

ε, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ και $\boldsymbol{\mu}$: 3×3 πίνακες, με στοιχεία μιγαδικές συναρτήσεις των r και ω.

Με τον 6-διανυσματικό συμβολισμό, το πρόβλημα γράφεται ως εξής:

$$i\omega \begin{bmatrix} \varepsilon & \xi \\ \zeta & \mu \end{bmatrix} \mathsf{e} = \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{curl} \\ -\operatorname{curl} & 0 \end{bmatrix} \mathsf{e}, \tag{5}$$

και μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, όπου το ω λειτουργεί ως ιδιοτιμή και το $\mathsf{e} := (E, H)^T$ ως ιδιοδιάνυσμα.

Με τον 6-διανυσματικό συμβολισμό, το πρόβλημα γράφεται ως εξής:

$$i\omega \begin{bmatrix} \varepsilon & \xi \\ \zeta & \mu \end{bmatrix} \mathsf{e} = \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{curl} \\ -\operatorname{curl} & 0 \end{bmatrix} \mathsf{e}, \tag{5}$$

και μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, όπου το ω λειτουργεί ως ιδιοτιμή και το $\mathsf{e} := (E, H)^T$ ως ιδιοδιάνυσμα.

Επισήμανση: Ο πίνακας στο αριστερό μέλος εξαρτάται από την ιδιοτιμή ω.

Το αρχικό φασματικό πρόβλημα μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathcal{Q}\mathsf{e} = \omega \mathsf{M}(\omega)\mathsf{e}. \tag{$\star$}$$

Το αρχικό φασματικό πρόβλημα μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathcal{Q}\mathsf{e} = \omega \mathsf{M}(\omega)\mathsf{e}. \tag{$\star$}$$

όπου

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(\omega) := \begin{bmatrix} \varepsilon & \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\zeta} & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix},$$

είναι ο πίνακας υλικού και

Το αρχικό φασματικό πρόβλημα μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathcal{Q}\mathsf{e} = \omega \mathsf{M}(\omega)\mathsf{e}. \tag{$\star$}$$

όπου

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(\omega) := \begin{bmatrix} \varepsilon & \boldsymbol{\xi} \\ \zeta & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix},$$

είναι ο πίνακας υλικού και

$$\mathcal{Q} := i \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{curl} \\ -\operatorname{curl} & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ο τυπικός τελεστής Maxwell.

Θα διατυπώσουμε τώρα την εξίσωση ($\star$) σε ένα χώρο Hilbert εστιάζοντας στην περίπτωση της κοιλότητας. Πιο συγκεκριμένα,

Υπόθεση 1

Ω είναι ένα Lipschitz χωρίο στον $\mathbb{R}^3$.

Θα διατυπώσουμε τώρα την εξίσωση $(\star)$ σε ένα χώρο Hilbert εστιάζοντας στην περίπτωση της κοιλότητας. Πιο συγκεκριμένα,

Υπόθεση 1

Ω είναι ένα Lipschitz χωρίο στον $\mathbb{R}^3$.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το σύνορο $\Gamma := \partial\Omega$ είναι τέλεια αγώγιμο,

Υπόθεση 2

$\hat{n} \times E = \mathbf{0}$ στο Γ.

Το πεδίο ορισμού του $\mathcal{Q}$ είναι

$$D(\mathcal{Q}) := H_0(\mathrm{curl}\,;\Omega) \times H(\mathrm{curl}\,;\Omega).$$

και $\mathcal{X} := L^2(\Omega; \mathbb{C}^3) \times L^2(\Omega; \mathbb{C}^2)$.

Το πεδίο ορισμού του $\mathcal{Q}$ είναι

$$D(\mathcal{Q}) := H_0(\operatorname{curl}; \Omega) \times H(\operatorname{curl}; \Omega).$$

και $\mathcal{X} := L^2(\Omega; \mathbb{C}^3) \times L^2(\Omega; \mathbb{C}^2)$.

Πρόταση 1

Ο $\mathcal{Q}$ είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής.

Το πεδίο ορισμού του $\mathcal{Q}$ είναι

$$D(\mathcal{Q}) := H_0(\operatorname{curl}; \Omega) \times H(\operatorname{curl}; \Omega).$$

και $\mathcal{X} := L^2(\Omega; \mathbb{C}^3) \times L^2(\Omega; \mathbb{C}^2)$.

Πρόταση 1

Ο $\mathcal{Q}$ είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής.

Υπόθεση 3

Οι παράμετροι ε, ξ, ζ και μ είναι $L^\infty(\Omega)$ συναρτήσεις.

Το πεδίο ορισμού του $\mathcal{Q}$ είναι

$$D(\mathcal{Q}) := H_0(\mathrm{curl}\,;\Omega) \times H(\mathrm{curl}\,;\Omega).$$

και $\mathcal{X} := L^2(\Omega;\mathbb{C}^3) \times L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)$.

Πρόταση 1

Ο $\mathcal{Q}$ είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής.

Υπόθεση 3

Οι παράμετροι ε, ξ, ζ και μ είναι $L^\infty(\Omega)$ συναρτήσεις.

Πόρισμα

Ο M ορίζει ένα φραγμένο πολλαπλασιαστικό τελεστή στον $\mathcal{X}$.

Το πεδίο ορισμού του $\mathcal{Q}$ είναι

$$D(\mathcal{Q}) := H_0(\mathrm{curl}\,;\Omega) \times H(\mathrm{curl}\,;\Omega).$$

και $\mathcal{X} := L^2(\Omega;\mathbb{C}^3) \times L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)$.

Πρόταση 1

Ο $\mathcal{Q}$ είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής.

Υπόθεση 3

Οι παράμετροι ε, ξ, ζ και μ είναι $L^\infty(\Omega)$ συναρτήσεις.

Πόρισμα

Ο M ορίζει ένα φραγμένο πολλαπλασιαστικό τελεστή στον $\mathcal{X}$.

Πρόταση 2

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ με συμπαγή εμφύτευση.

Το φάσμα του $\mathcal{Q}$ είναι διακριτό και αποτελείται από μία ακολουθία ιδιοτιμών χωρίς σημείο συσσώρευσης.

Το φάσμα του $\mathcal{Q}$ είναι διακριτό και αποτελείται από μία ακολουθία ιδιοτιμών χωρίς σημείο συσσώρευσης.

Μάλιστα, οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του $\mathcal{Q}$, εμφανίζονται ως μια ακολουθία $(\omega_n^0)_{n\in\mathbb{Z}^*}$.

Το φάσμα του $\mathcal{Q}$ είναι διακριτό και αποτελείται από μία ακολουθία ιδιοτιμών χωρίς σημείο συσσώρευσης.

Μάλιστα, οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του $\mathcal{Q}$, εμφανίζονται ως μια ακολουθία $(\omega_n^0)_{n\in\mathbb{Z}^*}$.

Η $(\omega_n^0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών, που συγκλίνει στο άπειρο, και $\omega^0_{-n} = -\omega_n^0$.

Το φάσμα του $\mathcal{Q}$ είναι διακριτό και αποτελείται από μία ακολουθία ιδιοτιμών χωρίς σημείο συσσώρευσης.

Μάλιστα, οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του $\mathcal{Q}$, εμφανίζονται ως μια ακολουθία $(\omega_n^0)_{n\in\mathbb{Z}^*}$.

Η $(\omega_n^0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών, που συγκλίνει στο άπειρο, και $\omega_{-n}^0 = -\omega_n^0$.

Κάθε ω_n^0, $n \neq 0$, μετριέται τόσες φορές όσες η πολλαπλότητά του.

Η $\omega_0^0 := 0$ είναι πάντα μια ιδιοτιμή αλλά χρειάζεται ειδική μεταχείριση εφόσον ο πυρήνας $\ker \mathcal{Q}$ είναι άπειρης διάστασης .

Ας εστιάσουμε τώρα στα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Ας εστιάσουμε τώρα στα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Σε κάθε ω_n^0, $n = 1, 2, ...$, αντιστοιχεί ένα κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα $\mathrm{e}_n := (E_n, H_n)^T$, το οποίο προκύπτει λύνοντας ένα πρόβλημα για την αρνητική Λαπλασιανή.

Ας εστιάσουμε τώρα στα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Σε κάθε ω_n^0, $n = 1, 2, ...$, αντιστοιχεί ένα κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα $\mathrm{e}_n := (E_n, H_n)^T$, το οποίο προκύπτει λύνοντας ένα πρόβλημα για την αρνητική Λαπλασιανή.

Επισήμανση: Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα, οπότε η ακολουθία $(e_n^0)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ μπορεί να επιλεγεί σαν μια ορθοκανονική ακολουθία.

Ας θεωρήσουμε τώρα, $\mathcal{H} := \overline{[..., e_{-n}, ..., e_{-2}, e_{-1}, e_1, e_2, ..., e_n, ...]}$.
Ο περιορισμός του $\mathcal{Q}$ στον $\mathcal{H}$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα, $\mathcal{H} := \overline{[\ldots, e_{-n}, \ldots, e_{-2}, e_{-1}, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots]}$.
Ο περιορισμός του $\mathcal{Q}$ στον $\mathcal{H}$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$.

Πρόταση 3

Ο $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$ είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής στον $\mathcal{H}$ και έχει συμπαγή αντίστροφο $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1}$. Η ακολουθία των ιδιοτιμών του $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$ είναι η $(\omega_n^0)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ και η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων είναι η $(e_n^0)_{n\in\mathbb{Z}^*}$. Η τελευταία αποτελεί μια ορθοκανονική βάση για τον $\mathcal{H}$.

Επομένως,η $(\star)$ περιορισμένη στον $\mathcal{H}$ μπορεί να γραφτεί ως $\mathsf{e} = \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1} \mathsf{M}(\omega)\mathsf{e}$.

Επομένως,η $(\star)$ περιορισμένη στον $\mathcal{H}$ μπορεί να γραφτεί ως $\mathrm{e} = \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1} \mathrm{M}(\omega)\mathrm{e}$.

Αν θέσουμε τώρα $\mathcal{F}(\omega) := \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1} \mathrm{M}(\omega)$ καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών για μια δέσμη τελεστών, δηλαδή

$$(I - \mathcal{F}(\omega))\mathrm{e} = 0 \tag{6}$$

Επομένως,η $(\star)$ περιορισμένη στον $\mathcal{H}$ μπορεί να γραφτεί ως $\mathsf{e} = \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1} \mathsf{M}(\omega) \mathsf{e}$.

Αν θέσουμε τώρα $\mathcal{F}(\omega) := \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1} \mathsf{M}(\omega)$ καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών για μια δέσμη τελεστών, δηλαδή

$$(I - \mathcal{F}(\omega))\mathsf{e} = 0 \tag{6}$$

$\mathcal{F}(\omega)$: είναι συμπαγής $\mathcal{X}$.

Θεωρούμε ένα ανοιχτό και συνεκτικό χωρίο $D \subset \mathbb{C}$ και μια συνάρτηση με τιμές τελεστές $F : D \to \mathcal{B}(X)$.

Θεωρούμε ένα ανοιχτό και συνεκτικό χωρίο $D \subset \mathbb{C}$ και μια συνάρτηση με τιμές τελεστές $F : D \to \mathcal{B}(X)$.

Ορισμός

Ένα ω ονομάζεται ιδιοτιμή της δέσμης τελεστών $I - F(\cdot)$ αν η εξίσωση $F(\omega)x = x$ έχει μη μηδενικές λύσεις. Μια μηδενική λύση $F(\omega)x = x$ $\omega \in S$, ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα της αντίστοιχης ιδιοτιμής ω και η γραμμική θήκη των ιδιοδιανυσμάτων λέγεται ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ω.

Έχουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα

Πρόταση 4 (Analytic Fredholm Alternative)

Έστω F αναλυτική και $F(\omega) \in \mathcal{K}(X)$ για όλα τα $\omega \in D$. Τότε
είτε
α) $I - F(\omega)$ δεν είναι 1-1 για κάθε $\omega \in D$,
είτε
β) $(I - F(\omega))^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ για όλα $\omega \in D \setminus S$, όπου $S \subset \mathbb{C}$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο χωρίς κανένα οριακό σημείο.

<u>Επισήμανση:</u> Στην περίπτωση (β), η συνάρτηση $(I - F(\cdot))^{-1}$ είναι αναλυτική στον $D \setminus S$, μερομορφική στον D και τα υπόλοιπα στους πόλους είναι τελεστές πεπερασμένης τάξης.

Ας εστιάσουμε τώρα στην ειδική περίπτωση $F(\omega) := AB(\omega)$, $\omega \in D$, όπου ο A είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και $B(\omega) \in \mathcal{B}(X)$. Χειριζόμαστε την εξίσωση σε μια γενική βάση σε έναν τυχαίο διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

Ας εστιάσουμε τώρα στην ειδική περίπτωση $F(\omega) := AB(\omega)$, $\omega \in D$, όπου ο A είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και $B(\omega) \in \mathcal{B}(X)$. Χειριζόμαστε την εξίσωση σε μια γενική βάση σε έναν τυχαίο διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

Το φασματικό θεώρημα εξασφαλίζει ότι ο A μπορεί να γραφτεί

$$Ax = \sum_n \lambda_n \left\langle x, e_n^0 \right\rangle e_n^0, \tag{7}$$

όπου (λ_n) είναι η ακολουθία (μη αρνητικών πραγματικών) ιδιοτιμών του A, σε απόλυτα φθίνουσα σειρά, μετρούμενες τόσες φορές όσες η πολλαπλότητά τους, και (e_n^0) είναι η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων.

Ας εστιάσουμε τώρα στην ειδική περίπτωση $F(\omega) := AB(\omega)$, $\omega \in D$, όπου ο A είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και $B(\omega) \in \mathcal{B}(X)$. Χειριζόμαστε την εξίσωση σε μια γενική βάση σε έναν τυχαίο διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

Το φασματικό θεώρημα εξασφαλίζει ότι ο A μπορεί να γραφτεί

$$Ax = \sum_n \lambda_n \left\langle x, e_n^0 \right\rangle e_n^0, \tag{7}$$

όπου (λ_n) είναι η ακολουθία (μη αρνητικών πραγματικών) ιδιοτιμών του A, σε απόλυτα φθίνουσα σειρά, μετρούμενες τόσες φορές όσες η πολλαπλότητά τους, και (e_n^0) είναι η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων.

Η τελευταία αποτελεί μια ορθοκανονική βάση για $\overline{R(A)}$. Εδώ υποθέτουμε ότι ο A έχει άπειρες ιδιοτιμές και συνεπώς $\lambda_n \to 0$.

Το πρόβλημα $F(\omega)x = x$, πιο συγκεκριμένα $AB(\omega)x = x$, εφόσον $x \in R(A)$, μπορεί τώρα να γραφτεί

Το πρόβλημα $F(\omega)x = x$, πιο συγκεκριμένα $AB(\omega)x = x$, εφόσον $x \in R(A)$, μπορεί τώρα να γραφτεί

$$\sum_n \lambda_n \left\langle B(\omega)x, e_n^0 \right\rangle e_n^0 = \sum_n \left\langle x, e_n^0 \right\rangle e_n^0,$$

ή, ισοδύναμα, ως

Το πρόβλημα $F(\omega)x = x$, πιο συγκεκριμένα $AB(\omega)x = x$, εφόσον $x \in R(A)$, μπορεί τώρα να γραφτεί

$$\sum_n \lambda_n \left\langle B(\omega)x, e_n^0 \right\rangle e_n^0 = \sum_n \left\langle x, e_n^0 \right\rangle e_n^0,$$

ή, ισοδύναμα, ως

$$\sum_n \lambda_n \left\langle x, \left(B(\omega) - \frac{1}{\lambda_n} I \right)^* e_n^0 \right\rangle e_n^0 = 0. \tag{8}$$

Το πρόβλημα $F(\omega)x = x$, πιο συγκεκριμένα $AB(\omega)x = x$, εφόσον $x \in R(A)$, μπορεί τώρα να γραφτεί

$$\sum_n \lambda_n \left\langle B(\omega)x, e_n^0 \right\rangle e_n^0 = \sum_n \left\langle x, e_n^0 \right\rangle e_n^0,$$

ή, ισοδύναμα, ως

$$\sum_n \lambda_n \left\langle x, \left(B(\omega) - \frac{1}{\lambda_n} I \right)^* e_n^0 \right\rangle e_n^0 = 0. \tag{8}$$

Θέτουμε $f_n = f_n(\omega) := \left(B(\omega) - \frac{1}{\lambda_n} I \right)^* e_n^0 = \left(B(\omega)^* - \frac{1}{\lambda_n} I \right) e_n^0$. Το αριστερό μέλος της (8) είναι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής

$$S = S(\omega) := \sum_n \lambda_n \left\langle \cdot, f_n \right\rangle e_n^0,$$

που αντιστοιχεί στις ακολουθίες $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, $(f_n) \subset X$, $(e_n) \subset X$, όπου (λ_n) είναι φραγμένη, (f_n) είναι μια ακολουθία και (e_n) είναι μια ορθοκανονική βάση.

Πρόταση 5

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
α) ο S είναι 1-1,
β) η (f_n) είναι μια πλήρης ακολουθία, δηλαδή $\overline{[f_1, f_2, ..., f_n, ...]} = X$,
ς) $\langle x, f_n \rangle = 0$ για κάθε n, σημαίνει $x = 0$.

Πρόταση 5

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
α) ο S είναι 1-1,
β) η (f_n) είναι μια πλήρης ακολουθία, δηλαδή $\overline{[f_1, f_2, ..., f_n, ...]} = X$,
ς) $\langle x, f_n \rangle = 0$ για κάθε n, σημαίνει $x = 0$.

Πόρισμα

Η ω είναι μια ιδιοτιμή του $I - F(\cdot)$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(f_n(\omega))$ δεν είναι πλήρης. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο $\ker S(\omega)$. Επιπλέον, ο $x \in \ker S(\omega)$ αν και μόνο αν $\langle x, f_n(\omega) \rangle = 0$ για κάθε n και , επομένως,

$$\ker S(\omega) = [f_1(\omega), f_2(\omega), ..., f_n(\omega), ...]^{\perp}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το αντίστροφο πρόβλημα, το οποίο είναι να ανακατασκευάσουμε τον τελεστή $B(\cdot)$ γνωρίζοντας τα ιδιοστοιχεία του προβλήματος $F(\omega)x = x$. Μάλιστα, ας θεωρήσουμε μια ιδιοτιμή ω και τον αντίστοιχο ιδιόχωρο $\ker S(\omega)$. Τότε,

$$\ker S(\omega)^T = \overline{[f_1(\omega), f_2(\omega), ..., f_n(\omega), ...]},$$

και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας τρόπος να υπολογίσουμε την ακολουθία $(f_n(\omega))$.

Ας θεωρήσουμε τώρα το αντίστροφο πρόβλημα, το οποίο είναι να ανακατασκευάσουμε τον τελεστή $B(\cdot)$ γνωρίζοντας τα ιδιοστοιχεία του προβλήματος $F(\omega)x = x$. Μάλιστα, ας θεωρήσουμε μια ιδιοτιμή ω και τον αντίστοιχο ιδιόχωρο $\ker S(\omega)$. Τότε,

$$\ker S(\omega)^T = \overline{[f_1(\omega), f_2(\omega), ..., f_n(\omega), ...]},$$

και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας τρόπος να υπολογίσουμε την ακολουθία $(f_n(\omega))$.

Η σχέση

$$\left\langle B(\omega)e_n^0, e_m^0 \right\rangle = \left\langle e_n^0, f_m(\omega) \right\rangle + \frac{\delta_{nm}}{\lambda_n}, \tag{9}$$

(δ_{nm} είναι το δέλτα του Kronecker) επιτρέπει την ανακατασκευή του $B(\omega)$.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημα

$$(I - \mathcal{F}(\omega))\mathrm{e} = 0 \tag{10}$$

όπου $\mathcal{F}(\omega) := \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1} \mathrm{M}(\omega)$.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημα

$$(I - \mathcal{F}(\omega))\mathsf{e} = 0 \tag{10}$$

όπου $\mathcal{F}(\omega) := \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1} \mathsf{M}(\omega)$.

Υπόθεση 4

Η M *είναι μια αναλυτική συνάρτηση* $D \ni \omega \mapsto \mathsf{M}(\omega) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, *όπου* D *είναι ένα χωρίο στο μιγαδικό επίπεδο, έτσι ώστε* $0 \in D$.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημα

$$(I - \mathcal{F}(\omega))\mathrm{e} = 0 \tag{10}$$

όπου $\mathcal{F}(\omega) := \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1} \mathrm{M}(\omega)$.

Υπόθεση 4

Η M *είναι μια αναλυτική συνάρτηση* $D \ni \omega \mapsto \mathrm{M}(\omega) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, *όπου* D *είναι ένα χωρίο στο μιγαδικό επίπεδο, έτσι ώστε* $0 \in D$.

Επομένως, ο $\mathcal{F}$ ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $D \ni \omega \mapsto \mathcal{F}(\omega) \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημα

$$(I - \mathcal{F}(\omega))\mathrm{e} = 0 \tag{10}$$

όπου $\mathcal{F}(\omega) := \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1} \mathrm{M}(\omega)$.

Υπόθεση 4

Η M *είναι μια αναλυτική συνάρτηση* $D \ni \omega \mapsto \mathrm{M}(\omega) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, *όπου* D *είναι ένα χωρίο στο μιγαδικό επίπεδο, έτσι ώστε* $0 \in D$.

Επομένως, ο $\mathcal{F}$ ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $D \ni \omega \mapsto \mathcal{F}(\omega) \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Επιπλέον, για $\omega_0 = 0$, $\mathcal{F}(\omega_0) = 0$ και συνεπώς $I - \mathcal{F}(\omega_0)$ είναι αντιστρέψιμος.

Το θεώρημα Fredholm δίνει

Το θεώρημα Fredholm δίνει

Πρόταση 6

Η δέσμη $I - \mathcal{F}(\cdot)$ έχει αριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών με πεπερασμένης διαστασης αντίστοιχους υπόχωρους. Οι ιδιοτιμές αυτές συνιστούν μια ακολουθία (ω_n) μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών, που αποκλίνει στο άπειρο.

Το θεώρημα Fredholm δίνει

Πρόταση 6

Η δέσμη $I - \mathcal{F}(\cdot)$ έχει αριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών με πεπερασμένης διαστασης αντίστοιχους υπόχωρους. Οι ιδιοτιμές αυτές συνιστούν μια ακολουθία (ω_n) μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών, που αποκλίνει στο άπειρο.

ω_n: ιδιοσυχνότητα της κοιλότητας
Η παραπάνω πρόταση δείχνει ότι τέτοιες συχνότητες υπάρχουν και είναι άπειρες αλλά αριθμήσιμες το πλήθος.

Το θεώρημα Fredholm δίνει

Πρόταση 6

Η δέσμη $I - \mathcal{F}(\cdot)$ έχει αριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών με πεπερασμένης διαστασης αντίστοιχους υπόχωρους. Οι ιδιοτιμές αυτές συνιστούν μια ακολουθία (ω_n) μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών, που αποκλίνει στο άπειρο.

ω_n: ιδιοσυχνότητα της κοιλότητας
Η παραπάνω πρόταση δείχνει ότι τέτοιες συχνότητες υπάρχουν και είναι άπειρες αλλά αριθμήσιμες το πλήθος.

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια ιδιοσυχνότητα ω_n λέγονται ρυθμοί διάδοσης..

Έστω τώρα $\mathcal{A} := \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1}$, $\mathsf{B}(\omega) := \omega\mathsf{M}(\omega)$.
Οι ιδιοτιμές του $\mathcal{A}$ υπολογίζονται ως εξής

$$\lambda_n := \frac{1}{\omega_n^0}\ ,\ n = \pm 1, \pm 2, ...,$$

και η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων είναι η (e_n).

Έστω τώρα $\mathcal{A} := \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1}$, $\mathsf{B}(\omega) := \omega \mathsf{M}(\omega)$.
Οι ιδιοτιμές του $\mathcal{A}$ υπολογίζονται ως εξής

$$\lambda_n := \frac{1}{\omega_n^0} \; , \; n = \pm 1, \pm 2, ...,$$

και η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων είναι η (e_n).

Επομένως, έχουμε

$$\mathcal{A}\mathsf{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \left\langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_n^0 \right\rangle \mathsf{e}_n^0.$$

Έστω τώρα $\mathcal{A} := \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}^{-1}$, $\mathsf{B}(\omega) := \omega \mathsf{M}(\omega)$.
Οι ιδιοτιμές του $\mathcal{A}$ υπολογίζονται ως εξής

$$\lambda_n := \frac{1}{\omega_n^0} \ , \ n = \pm 1, \pm 2, ...,$$

και η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων είναι η (e_n).

Επομένως, έχουμε

$$\mathcal{A}\mathsf{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \left\langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_n^0 \right\rangle \mathsf{e}_n^0.$$

Τώρα $\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{A}\mathsf{B}(\omega)$ και το πρόβλημα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\mathcal{S}\mathsf{x} = \mathcal{S}(\omega)\mathsf{x} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \left\langle \mathsf{x}, \mathsf{f}_n \right\rangle \mathsf{e}_n^0,$$

όπου

$$\mathsf{f}_n = \mathsf{f}_n(\omega) := \left(\mathsf{B}(\omega) - \frac{1}{\lambda_n} I \right)^* \mathsf{e}_n^0 = \left(\bar{\omega} \mathsf{M}(\omega)^* - \omega_n^0 I \right) \mathsf{e}_n^0 \ , \ n = \pm 1, \pm 2, ...$$

Πρόταση 7

Το $\omega \neq 0$ *είναι μια ιδιοσυχνότητα της κοιλότητας αν και μόνο αν ο* $\mathcal{S}(\omega)$ *δεν είναι 1-1 τελεστής, αν και μόνο αν* $(\mathrm{f}_n(\omega))_{n\in\mathbb{Z}^*}$ *δεν είναι πλήρης. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος των ρυθμών είναι πεπερασμένης διάστασης και δίνεται από*

$$\ker \mathcal{S}(\omega) = [, ..., \mathrm{f}_{-n}(\omega), ..., \mathrm{f}_{-2}(\omega), \mathrm{f}_{-1}(\omega), \mathrm{f}_1(\omega), \mathrm{f}_2(\omega), ..., \mathrm{f}_n(\omega), ...]^{\perp}.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\left\langle \mathrm{M}(\omega)\mathrm{e}_n^0, \mathrm{e}_m^0 \right\rangle = \omega_n^0 \left\langle \mathrm{e}_n^0, f_m(\omega) \right\rangle + \delta_{nm},$$

από την οποία μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τον πίνακα υλικού.

Σας ευχαριστώ!