Λογικός Προγραμματισμός

Θοδωρής Ανδρόνικος &
Μιχάλης Στεφανιδάκης
Τμήμα Πληροφορικής
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Εισαγωγή (1)

- Τι είναι λογική;
  - Λογική είναι η ανάλυση των μεθόδων συλλογισμού.
- Η λογική ασχολείται με
  - τη δομή και
  - τη μορφή των προτάσεων
- Δεν ασχολείται με
  - το σημασιολογικό τους περιεχόμενο

Εισαγωγή (2)

- Παράδειγμα 1:
  - Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
  - Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
  - Άρα, ο Σωκράτης είναι θνητός.
- Παράδειγμα 2:
  - Όλα τα άλογα είναι χορτοφάγα.
  - Ο Άνεμος είναι άλογο.
  - Άρα, ο Άνεμος είναι χορτοφάγος.

Εισαγωγή (3)

- Σημασία έχει η δομή της συλλογιστικής διαδικασίας:
  - Όλοι τα αντικείμενα τύπου Α έχουν την ιδιότητα Β.
  - Το S είναι αντικείμενο τύπου Α.
  - Άρα, το S έχει την ιδιότητα Β.

Εισαγωγή (4)

- Η συστηματική τυποποίηση και καταγραφή των έγκυρων (δηλ., των σωστών) μεθόδων συλλογισμού είναι η κύρια δουλειά των λογικών (logicians).
- Όταν η λογική χρησιμοποιεί μαθηματικές τεχνικές και μελετά τα μαθηματικά, τότε έχουμε τη μαθηματική λογική.

Εισαγωγή (5)

- Ο «πατέρας» της λογικής είναι ο Αριστοτέλης.
- Η σοβαρή ενασχόληση των μαθηματικών με τη λογική ξεκινά στα τέλη του 19ου αιώνα.
- Αιτία; Η ανακάλυψη των παραδόξων.

Εισαγωγή (6)

- Το παράδοξο του Russell (1902):
  - Έστω ότι σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων (αφελής, naive, ορισμός – δεν ισχύει).
  - Έστω ότι $A = \{X \mid X \notin X\}$.
  - Το A ανήκει στο A ή όχι;

Εισαγωγή (7)

- Το παράδοξο του Cantor (1899):
  - Έστω $|A|$ ο πληθάριθμος (cardinal) του A.
  - $|A| = |B|$ ανν υπάρχει συνάρτηση 1-1 και επί από το A στο B.
  - $|A| \leq |B|$ ανν $|A| = |B_0|$, όπου $B_0 \subseteq B$.
  - $|A| < |B|$ ανν $|A| \leq |B|$ και $|A| \neq |B|$.
  - $|A| < |P(A)|$ (Cantor)
  - Έστω V το σύνολο όλων των συνόλων, τότε:
    - $P(V) \subseteq V$ (εξ' ορισμού) και άρα $|P(V)| \leq |V|$
    - $|V| < |P(V)|$ (Cantor)
    - Άρα, $|V| = |P(V)|$

Εισαγωγή (8)

- Το παράδοξο του ψεύτη:
  - Έστω ότι ένας άνθρωπος ισχυρίζεται:
  - «Εγώ λέω ψέματα.»
  - Λέει ψέματα ή λέει αλήθεια;

Οι 2 βασικές έννοιες της λογικής

- Σύνταξη (syntax)
  - Μια τυπική γλώσσα στην οποία διατυπώνουμε προτάσεις.
- Σημασιολογία ή ερμηνεία (semantics)
  - Ένας κόσμος (πιο αυστηρά μια μαθηματική δομή) για τον οποίο «μιλάνε» οι προτάσεις μας.

Αλήθεια και ψέμα

- Πότε μια πρόταση είναι αληθής;
- Η αλήθεια μιας πρότασης είναι απόρροια της δομής της.
- Πότε μια πρόταση είναι λογική συνέπεια (logical consequence) ενός συνόλου προτάσεων;

Απόδειξη (1)

- Πως αποδεικνύεται ότι μια πρόταση είναι αληθής;
- Αποδεικτική διαδικασία: αλγόριθμος (που σημαίνει ότι επεξεργάζεται μηχανικά συμβολοσειρές χωρίς να ασχολείται με το νόημά τους) που αποδεικνύει αν μια πρόταση είναι αληθής (δηλ., απαντά ναι ή όχι).

Απόδειξη (2)

- Η αποδεικτική διαδικασία πρέπει να είναι:
  - Σωστή (sound), να αποδεικνύει μόνο αληθείς προτάσεις, και
  - Πλήρης (complete), να αποδεικνύει κάθε αληθή πρόταση.

Προτασιακή Λογική – Σύνταξη (1)

- Το αλφάβητο της γλώσσας:
  - Ένα αριθμήσιμα άπειρο σύνολο **A** από ατομικές προτάσεις: p_0, p_1, p_2, … .
  - Οι προτασιακοί σύνδεσμοι: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\top$, $\bot$.
  - Οι παρενθέσεις (,).

Προτασιακή Λογική – Σύνταξη (2)

- Το σύνολο των προτάσεων **P** είναι το μικρότερο σύνολο για το οποίο ισχύουν:
  - Κάθε ατομική πρόταση ανήκει στο **P**.
  - Αν ϕ, $\psi \in \mathbf{P}$, τότε και $(\neg\phi)$, $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\rightarrow\psi)$, $(\phi\leftrightarrow\psi)\in\mathbf{P}$.

Αρχή της (δομικής) επαγωγής

- Θεώρημα: Κάθε πρόταση έχει την ιδιότητα Q εφόσον:
  - Κάθε ατομική πρόταση έχει την ιδιότητα Q .
  - Αν ϕ και ψ έχουν την ιδιότητα Q, τότε και $(\neg\phi)$, $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\rightarrow\psi)$, $(\phi\leftrightarrow\psi)$ έχουν την ιδιότητα Q.

Αρχή της (δομικής) αναδρομής

- Θεώρημα: Υπάρχει μία και μόνο μία συνάρτηση f ορισμένη πάνω στο σύνολο **P**, τ.ω.:
  - Η τιμή της f στις ατομικές προτάσεις ορίζεται ρητά.
  - Η τιμή της f σε προτάσεις της μορφής $(\neg\phi)$, $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\rightarrow\psi)$, $(\phi\leftrightarrow\psi)$ ορίζεται με βάση τις τιμές $f(\phi)$ και $f(\psi)$.

Μοναδική Συντακτική Ανάλυση (Unique Parsing)

- Θεώρημα: Κάθε πρόταση φ υπάγεται ακριβώς σε μία από τις κατηγορίες:
  - Είναι ατομική πρόταση.
  - Είναι της μορφής $(\neg\psi)$, για μοναδική πρόταση ψ,
  - Είναι της μορφής $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, για μοναδικές ψ_1 και ψ_2,
  - Είναι της μορφής $(\psi_1 \vee \psi_2)$, για μοναδικές ψ_1 και ψ_2,
  - Είναι της μορφής $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$, για μοναδικές ψ_1 και ψ_2,
  - Είναι της μορφής $(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$, για μοναδικές ψ_1 και ψ_2.

Προτασιακή Λογική – Σημασιολογία (1)

- Η (κλασική) προτασιακή λογική είναι δίτιμη, με χώρο τιμών τις αληθοτιμές (truth values) **T** (αληθής) **F** (ψευδής): **Tr = {F, T}**.
- Ερμηνεύουμε τους προτασιακούς συνδέσμους χρησιμοποιώντας συναρτήσεις από το **Tr** στο **Tr**.
- $\neg$: **Tr** → **Tr** τ.ω.:
  - (T) = F, και
  - (F) = T, και

Προτασιακή Λογική – Σημασιολογία (2)

- Για τους διμελείς συνδέσμους έχουμε στη διάθεσή μας $2^{2^2} = 16$ διμελείς συναρτήσεις από το **Tr** στο **Tr**.

Προτασιακή Λογική – Σημασιολογία (3)

		Λογικοί Σύνδεσμοι			
		$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

Πίνακας αλήθειας

Πίνακας αλήθειας για $(p_0 \leftrightarrow p_1) \rightarrow ((\neg p_0) \wedge p_1)$

p_0	p_1	$p_0 \leftrightarrow p_1$	$\neg p_0$	$((\neg p_0) \wedge p_1$	$(p_0 \leftrightarrow p_1) \rightarrow ((\neg p_0) \wedge p_1)$
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**

Πλήρες σύνολο προτασιακών συνδέσμων

- Το $\{\neg, \wedge\}$ είναι πλήρες σύνολο προτασιακών συνδέσμων, γιατί οι υπόλοιποι σύνδεσμοι μπορούν να οριστούν μέσω αυτών:
  - $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ως $\neg((\neg\psi_1) \wedge (\neg\psi_2))$
  - $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ ως $\neg(\psi_1 \wedge (\neg\psi_2))$
  - $(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$ ως $(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$

Απονομή αλήθειας (1)

- Απονομή αλήθειας (Boolean valuation) είναι κάθε συνάρτηση V: **P** → **Tr** τ.ω.:
  - $V(\neg\phi) = \neg V(\phi)$
  - $V(\psi_1 \circ \psi_2) = V(\psi_1) \circ V(\psi_2)$, όπου $\circ$ αντιστοιχεί στους διμελείς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Απονομή αλήθειας (2)

- Πρόταση 1: Για κάθε συνάρτηση f από το σύνολο των ατομικών προτάσεων στο **Tr**, υπάρχει απονομή αλήθειας που συμφωνεί με την f στις ατομικές προτάσεις.
- Πρόταση 2: Αν V_1 και V_2 είναι δύο απονομές αλήθειας που συμφωνούν σε κάθε ατομική πρόταση, τότε $V_1(\phi)=V_2(\phi)$ για κάθε πρόταση $\phi\in\mathbf{P}$.

Ταυτολογίες

- Μια πρόταση $\phi \in \mathbf{P}$ είναι **ταυτολογία** (**tautology**) αν $V(\phi)=\mathbf{T}$ για κάθε απονομή αλήθειας V.
- Το αν μια πρόταση $\phi \in \mathbf{P}$ είναι ταυτολογία, είναι **αποκρίσιμο** (**decidable**).
  - Για να αποκριθούμε ναι ή όχι, κατασκευάζουμε ένα πίνακα αλήθειας με 2^n γραμμές
  - Ο αλγόριθμος αυτός δεν είναι αποδοτικός γιατί δεν είναι πολυωνυμικός

Ικανοποιησιμότητα

- Ένα σύνολο Σ προτάσεων του **P** είναι **ικανοποιήσιμο** (**satisfiable**) αν υπάρχει απονομή αλήθειας V, τ.ω. V(φ)=**T** για κάθε φ∈Σ.
- Θεώρημα 1: Μια πρόταση φ∈**P** είναι ταυτολογία ανν η πρόταση ¬φ είναι μη ικανοποιήσιμη.

Θεωρήματα Αντικατάστασης (1)

- Έστω πρόταση φ που περιέχει την ατομική πρόταση p. Γράφουμε **$\phi(p \mid \psi)$** για να δηλώσουμε την πρόταση που προκύπτει από την φ αν αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις της p με την πρόταση ψ.
- Θεώρημα Αντικατάστασης 1: Έστω προτάσεις ψ_1 και ψ_2 απονομή αλήθειας V. Αν $V(\psi_1)=V(\psi_2)$, τότε $V(\phi(p \mid \psi_1))=V(\phi(p \mid \psi_2))$.

Θεωρήματα Αντικατάστασης (2)

- Θεώρημα Αντικατάστασης 2: Αν $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ είναι ταυτολογία, τότε $\phi(p \mid \psi_1) \leftrightarrow \phi(p \mid \psi_2)$ είναι ταυτολογία.

Κανονικές μορφές (1)

- Αρνητική κανονική μορφή: μια πρόταση φ είναι σε αρνητική κανονική μορφή αν όλες οι αρνήσεις (¬) στη φ εμφανίζονται μπροστά από ατομικές προτάσεις.
- Κάθε πρόταση μπορεί να μετασχηματιστεί σε αρνητική κανονική μορφή. Υπάρχει αλγόριθμος με τον οποίο μια πρόταση φ μπορεί να μετατραπεί σε μια πρόταση ψ σε αρνητική κανονική μορφή, έτσι ώστε $\phi \leftrightarrow \psi$ να είναι ταυτολογία.
  - Παράδειγμα: $\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow ((\neg p_0) \vee (\neg p_1))$

Κανονικές μορφές (2)

- Προσημασμένη ατομική πρόταση (literal): είναι είτε μια ατομική πρόταση είτε η άρνηση μίας ατομικής πρότασης.
- Απλή πρόταση (clause): είναι μια διάζευξη
  $(l_0 \vee l_1 \vee \ldots \vee l_n)$ όπου κάθε όρος είναι προσημασμένη ατομική πρόταση.
- Δυϊκή απλή πρόταση (dual clause): είναι μια σύζευξη
  $(l_0 \wedge l_1 \wedge \ldots \wedge l_n)$ όπου κάθε όρος είναι προσημασμένη ατομική πρόταση.

Κανονικές μορφές (3)

- Συζευκτική κανονική μορφή (conjunctive normal form ή clause form): μία πρόταση φ είναι σε συζευκτική κανονική μορφή αν είναι στη μορφή $(c_0 \wedge c_1 \wedge \ldots \wedge c_n)$, όπου κάθε όρος είναι απλή πρόταση.
- Διαζευκτική κανονική μορφή (disjunctive normal form): μία πρόταση φ είναι σε διαζευκτική κανονική μορφή αν είναι στη μορφή $(d_0 \vee d_1 \vee \ldots \vee d_n)$, όπου κάθε όρος είναι δυϊκή απλή πρόταση.

Κανονικές μορφές (4)

- Κάθε πρόταση μπορεί να μετασχηματιστεί σε συζευκτική κανονική μορφή.
- Κάθε πρόταση μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαζευκτική κανονική μορφή.

Σημασιολογικά ταμπλό (1) – Κανόνες ανάπτυξης ταμπλό

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \qquad \frac{\psi_1\wedge\psi_2}{\begin{array}{c}\psi_1\\ \psi_2\end{array}} \qquad \frac{\neg(\psi_1\vee\psi_2)}{\begin{array}{c}\neg\psi_1\\ \neg\psi_2\end{array}} \qquad \frac{\neg(\psi_1\rightarrow\psi_2)}{\begin{array}{c}\psi_1\\ \neg\psi_2\end{array}}$$

$$\frac{\psi_1\vee\psi_2}{\begin{array}{c|c}\psi_1 & \psi_2\end{array}} \qquad \frac{\neg(\psi_1\wedge\psi_2)}{\begin{array}{c|c}\neg\psi_1 & \neg\psi_2\end{array}} \qquad \frac{\psi_1\rightarrow\psi_2}{\begin{array}{c|c}\neg\psi_1 & \psi_2\end{array}}$$

Σημασιολογικά ταμπλό (2)

- Το ταμπλό είναι **αρνητικό** (**refutation**) αποδεικτικό σύστημα, δηλ., για να αποδείξουμε ότι η πρόταση **φ** είναι ταυτολογία, ξεκινάμε με την πρόταση **¬φ**, προσπαθώντας ναι καταλήξουμε σε **αντίφαση**.

Σημασιολογικά ταμπλό (3)

- Ένα κλαδί του ταμπλό είναι **κλειστό** αν περιέχει την πρόταση **φ** και την πρόταση **¬φ**.
- Ένα ταμπλό είναι **κλειστό** αν κάθε κλαδί του είναι **κλειστό**.
- Μια **απόδειξη** ταμπλό για την πρόταση **φ** είναι ένα κλειστό ταμπλό για την πρόταση **¬φ**.
- Για να δείξουμε ότι υπάρχει απόδειξη ταμπλό για την πρόταση **φ** γράφουμε $\vdash_t \phi$.

Σημασιολογικά ταμπλό (4)

(1) $\neg(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \vee p_4) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \vee p_4))$

(2-1) $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)$

(3-1) $\neg((p_1 \vee p_4) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \vee p_4)$

(4-3) $p_1 \vee p_4$

(5-3) $\neg((p_2 \rightarrow p_3) \vee p_4)$

(6-5) $\neg(p_2 \rightarrow p_3)$

(7-5) $\neg p_4$

(8-2) $\neg p_1$ (9-2) $p_2 \rightarrow p_3$

(10-4) p_1 (11-4) p_4

Σημασιολογικά ταμπλό (5)

- Γενικά οι αποδείξεις ταμπλό είναι συντομότερες από τον πίνακα αλήθειας.
  - Παράδειγμα: η πρόταση $\phi \vee \neg\phi$.
- Οι κανόνες ταμπλό είναι **μη ντετερμινιστικοί (μη αιτιοκρατικοί)** αν, δηλ., εμείς αποφασίζουμε ποια πρόταση να αναπτύξουμε και από ποιο κλαδί.
- Ένα ταμπλό χαρακτηρίζεται ως **αυστηρό (strict)**, αν κατά την κατασκευή του καμία πρόταση δεν αναπτύχθηκε πάνω από μία φορά σε κάθε κλαδί.

Επίλυση (Resolution) (1)

- Η επίλυση, όπως και τα ταμπλό, είναι **αρνητικό** (**refutation**) αποδεικτικό σύστημα, δηλ., για να αποδείξουμε ότι η πρόταση **φ** είναι ταυτολογία, ξεκινάμε με την πρόταση **¬φ**, προσπαθώντας ναι καταλήξουμε σε **αντίφαση**.

Επίλυση (Resolution) (2)

- Δουλεύουμε με προτάσεις που βρίσκονται σε **συζευκτική κανονική μορφή**.
- Τώρα όμως γράφουμε τις clauses ως σύνολα: Αντί για $(l_0 \vee l_1 \vee \ldots \vee l_n)$, γράφουμε $\{l_0, l_1, \ldots, l_n\}$.
  - Π.χ.: αντί για $(p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2)$, γράφουμε $\{p_0, \neg p_1, \neg p_2\}$.
  - Βελτίωση αντί για $(p_0 \vee \neg p_1 \vee p_0)$, γράφουμε $\{p_0, \neg p_1\}$.

Επίλυση (Resolution) (3)

- Η κενή clause συμβολίζεται ως □.
- Ισχύει ότι V(□) = **F** για κάθε απονομή αλήθειας V, δηλ., η κενή clause είναι μη ικανοποιήσιμη.
- Άρα, αν κατά την ανάπτυξη ενός τύπου (σε συζευκτική κανονική μορφή) με βάση τον κανόνα της επίλυσης, προκύψει η □, τότε ο τύπος είναι μη ικανοποιήσιμος.

Resolution Principle (Κανόνας Επίλυσης)

- Έστω C_1 και C_2 δύο clauses τ.ω. το literal X να εμφανίζεται στην C_1 και το $\neg X$ στην C_2. Η clause C που προκύπτει ως εξής:
  1. Διαγράφουμε όλες τις εμφανίσεις του X από την C_1,
  2. Διαγράφουμε όλες τις εμφανίσεις του $\neg X$ από την C_2,
  3. Ενώνουμε τις δύο διαζεύξεις που προκύπτουν.

  είναι το αποτέλεσμα της επίλυσης των C_1 και C_2 με βάση το literal X.

Επίλυση (Resolution) (5)

- Παραδείγματα:
  - Αν $C_1 = \{p, \neg q, r\}$ και $C_2 = \{\neg p, s, t\}$, η επίλυση ως προς p δίνει την $C = \{\neg q, r, s, t\}$.
  - Αν $C_1 = \{p\}$ και $C_2 = \{\neg p\}$, η επίλυση ως προς p δίνει την $C = \square$.

Επίλυση (Resolution) (6)

- Ο τύπος $(p_0 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_0 \leftrightarrow \neg p_2)$ είναι μη ικανοποιήσιμος.
- Ο παραπάνω τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή γίνεται:

$\{\{\neg p_0, \neg p_1, p_2\}, \{p_0, p_1\}, \{\neg p_0, p_1\}, \{p_0, \neg p_1\}, \{p_0, \neg p_2\}, \{\neg p_0, \neg p_2\}, \{\neg p_0, p_2\}\}$

- Με χρήση του κανόνα της επίλυσης προκύπτουν διαδοχικά:

(1) $\{p_0\}$, από $\{p_0, p_1\}$ και $\{p_0, \neg p_1\}$

(2) $\{\neg p_0, \neg p_1\}$, από $\{\neg p_0, \neg p_1, p_2\}$ και $\{\neg p_0, \neg p_2\}$

(3) $\{\neg p_0\}$, από $\{\neg p_0, \neg p_1\}$ και $\{\neg p_0, p_1\}$

(4) $\square$, από $\{p_0\}$ και $\{\neg p_0\}$

Επίλυση (Resolution) (7)

- Μια ανάπτυξη ενός τύπου (με βάση τον κανόνα της επίλυσης) είναι **κλειστή** αν περιέχει την □.
- Μια **απόδειξη** με τον κανόνα της επίλυσης για την πρόταση **φ** είναι μια κλειστή ανάπτυξη για την πρόταση **¬φ**.
- Για να δείξουμε ότι υπάρχει απόδειξη με επίλυση για την πρόταση **φ** γράφουμε $\vdash_r \boldsymbol{\phi}$.

Ορθότητα (Soundness) (1)

- Ένα σύνολο Σ προτάσεων είναι **ικανοποιήσιμο** (**satisfiable**) αν υπάρχει απονομή αλήθειας V, τ.ω. V(φ)=**T** για κάθε φ∈Σ.
- Ένα κλαδί θ ενός ταμπλό είναι **ικανοποιήσιμο** (**satisfiable**) αν υπάρχει απονομή αλήθειας V, τ.ω. V(φ)=**T** για κάθε φ∈θ.
- Ένα ταμπλό είναι **ικανοποιήσιμο** (**satisfiable**) αν έχει ένα τουλάχιστο ικανοποήσιμο κλαδί.

Ορθότητα (Soundness) (2)

- Πρόταση 1: Κάθε εφαρμογή κανόνα ταμπλό σε ένα ικανοποιήσιμο ταμπλό, οδηγεί σε ικανοποιήσιμο ταμπλό.
- Πρόταση 2: Αν ένα σύνολο προτάσεων Σ έχει κλειστό ταμπλό, τότε είναι μη ικανοποιήσιμο.
- Θεώρημα: Αν ο τύπος φ έχει απόδειξη ταμπλό, τότε είναι **ταυτολογία**.

Ορθότητα (Resolution) (3)

- Πρόταση 1: Κάθε εφαρμογή κανόνα του κανόνα της επίλυσης σε μια ικανοποιήσιμη ανάπτυξη ενός τύπου (με βάση τον κανόνα της επίλυσης) οδηγεί σε ικανοποιήσιμη ανάπτυξη.
- Πρόταση 2: Αν ένα σύνολο προτάσεων Σ έχει κλειστή ανάπτυξη (με βάση τον κανόνα της επίλυσης), τότε είναι μη ικανοποιήσιμο.
- Θεώρημα: Αν ο τύπος φ έχει απόδειξη με επίλυση, τότε είναι **ταυτολογία**.

Πρωτοβάθμια Κατηγορηματική Λογική (1)

- Το αλφάβητο της γλώσσας – «λογικά» σύμβολα:
  - Ένα αριθμήσιμα άπειρο σύνολο από μεταβλητές: x_0, x_1, x_2, … .
    (Στην πράξη θα γράφουμε x, y, z, κλπ.)
  - Οι προτασιακοί σύνδεσμοι: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\top$, $\bot$.
  - Οι παρενθέσεις (,).