ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ»

-ΟΜΑΔΑ Α-

1^{ο} ΘΕΜΑ

(3,0 Μονάδες)

Εξετάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται σε έναν στοιχειώδη όγκο ρευστού $V(t)$, και παίρνοντας υπόψη μας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (διατήρηση της ορμής), αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{D}{Dt}\iiint\limits_{V(t)} \left(\rho\vec{U}dV\right) = \iiint\limits_{V(t)} \left(\rho\vec{f} + div\sigma_{ij}\right)dV \qquad \text{(A)}$$

όπου:

$\vec{U}$: το πεδίο των ταχυτήτων
ρ: Η πυκνότητα του ρευστού
$\vec{f}$: Οι εξωτερικές δυνάμεις οι οποίες εξασκούνται
σ_{ij} : Ο τανυστής των τάσεων

(Η εξίσωση (Α) θεωρείται δεδομένη και δεν χρειάζεται να αποδειχθεί. Η εξίσωση αυτή ισχύει για τις περιπτώσεις μη ασυμπίεστης και ασυμπίεστης ροής, για νευτώνεια και μη νευτώνεια ρευστά.)

Με βάση την (Α) αποδείξτε ότι

1α) $$\iiint\limits_{V(t)} \left((\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}\right) - \rho\vec{f} - div\sigma_{ij})dV = 0$$

1β) $$\left(\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}\right) - \rho\vec{f} - div\sigma_{ij} = 0$$

Για την απόδειξη της (1α) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα μεταφοράς Reynolds (θέτοντας $\Phi = \rho\vec{U}$), την εξίσωση της συνέχειας, (η οποία όπως αναφέρεται στο βιβλίο του κ. Κωτσοβίνου και αποδείχτηκε στην παράδοση μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{U} = 0$), αλλά και την σχέση: $\frac{D(\rho\vec{U})}{Dt} = \rho\frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{U}\frac{D\rho}{Dt}$.

1ε) Αποδείξτε ότι οι δύο παρακάτω μορφές της εξίσωσης της συνέχειας είναι ισοδύναμες:

$X)$ $\quad \dfrac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{U} = 0$ και

$Y)$ $\quad \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\vec{U}\right) = 0$

Αιτιολογείστε αναλυτικά τα βήματα που κάνετε για την απόδειξη, αναφέροντας ενδεχομένως σε ποια παράγραφο του συνοδευτικού φυλλαδίου και της παρούσης εκφώνησης αναφέρονται τα θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιείτε

2ο ΘΕΜΑ

(2,0 Μονάδες)

Εξετάζουμε δισδιάστατη ροή ασυμπίεστου ρευστού γύρω από επίπεδη πλάκα. Θεωρούμε το πεδίο της πίεσης σταθερό. Ανάντη της πλάκας η ροή είναι και παράλληλη στην επιφάνεια της πλάκας:

$$u_x = U_\infty$$
$$u_y = 0$$

Ορίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x στην αρχή της πλάκας και την ανεξάρτητη μεταβλητή y κάθετα στην επιφάνεια της πλάκας. Προφανώς ονομάζουμε u_x την συνιστώσα της ταχύτητας η οποία είναι παράλληλη στην επιφάνεια της πλάκας και u_y την συνιστώσα της ταχύτητας της ροής η οποία είναι κάθετη. Το πάχος της οριακής στιβάδας σε μία οισμένη απόσταση από την αρχή της πλάκας ονομάζεται $\varDelta$.

Στην πράξη οι οριακές συνθήκες οι οποίες συνδέονται με τα πρόβλημα αυτό είναι οι εξής:

I) Για y=0: $u_x = u_y = 0$ (συνθήκη μη ολίσθησης)
II) Για y$\geq \varDelta$: $u_x = U_\infty$, $u_y = 0$ (δεν έχουμε διαταραχή της ροής από την παρουσία της πλάκας έξω από την οριακή στιβάδα).

Για την επίλυση της ροής, στο τμήμα το οποίο αυτή είναι στρωτή, μετά από μία σειρά από πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$\rho\int_0^{\Delta}\frac{\partial\left[u_x\left(U_\infty-u_x\right)\right]}{\partial x}\partial y+\rho\left[u_y\left(U_\infty-u_x\right)\right]_0^{\Delta}=-\mu\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_0^{\Delta} \qquad (3.1)$$

Σημείωση: Στην παραπάνω εξίσωση (3.1) η σύμβαση που δίνεται για τις αγκύλες είναι η σύνηθης (συνδέεται με τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος: π.χ.

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(b)$$

2[α]) Γράψτε την εξίσωση (3.1) στην πιο απλή δυνατή μορφή παίρνοντας υπόψη σας τις οριακές συνθήκες
2β) Για να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε την εξίσωση η οποία προκύπτει μετά την απλοποίηση της εξίσωσης (3.1) –απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα- ψάχνουμε για μία λύση με την βοήθεια του μετασχηματισμού:

$$\frac{u_x}{U_\infty}=f(\eta),\ \eta=\frac{y}{\Delta}$$

Ορίστε τις κατάλληλες οριακές συνθήκες για την συνάρτηση *f(η(*