Μόνιμη ροή προερχόμενη από κίνηση πλάκας σε άπειρο χώρο (Ροή Couette)

- Εξετάζουμε την επίπεδη ροή που λαμβάνει μεταξύ δύο επίπεδων πλακών οι οποίες έχουν απόσταση κατά την διεύθυνση y, *h* (h=ύψος.) Το μήκος τους είναι L, θεωρείται πολύ μεγάλο
- Η πλάκες είναι , παράλληλες, στον άξονα x.

  Η κάτω πλάκα είναι ακίνητη, η πάνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα U
- Το πλάτος του ρευστού κατά την διεύθυνση z είναι πολύ μεγαλύτερη από το ύψος h. Κατά συνέπεια η ροή είναι όμοια στα επίπεδα κάθετα στον άξονα z

$$\frac{\partial\cdot}{\partial z} = 0$$

•Λόγω των παραπάνω συνθηκών υποθέτουμε ότι η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας είναι η u ($v=w=0$)

- Οι ταχύτητες είναι μικρές ώστε οι όροι αδρανείας (μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης Navier Stokes) να παραλείπονται

•Η ροή μπορεί να θεωρηθεί ισόχωρος ή ασυμπίεστη

•Εξετάζουμε το φαινόμενο για αρκετά μεγάλο χρόνο μετά την έναρξη του. Θεωρούμε ότι έχει έρθει σε μία σταθερή κατάσταση. Κατά συνέπεια η ροή μπορεί να θεωρηθεί μόνιμη

•Δεν υπάρχει διαφορά πίεσης ανάμεσα στις δύο άκρες των πλακών

Οι εξισώσεις της κίνησης ενός νευτώνειου ασυμπίεστου ρευστού απλοποιούνται στις παρακάτω, είναι παρόμοιες με αυτές της ροής Hele-Shaw :

- Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (4.6.1.1)$$

•Εξισώσεις Navier Stokes

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.6.1.2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (4.6.1.3)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \qquad (4.6.1.4)$$

Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος είναι :

A) Για την ταχύτητα έχουμε την συνθήκη μη ολισθήσεως.

$$y = 0 \qquad u = 0$$

$$y = h \qquad u = U$$

B) Οι διαφορά πίεσης είναι Δp=p(x=L)-p(x=0)=0

Από την (4.6.1.3) και (4.6.1.4) συνεπάγεται ότι η πίεση είναι συνάρτηση μόνο του x

- Από την (4.6.1.1) συνεπάγεται ότι η ταχύτητα *u* δεν εξαρτάται από το x. Ξέρουμε όμως ότι δεν εξαρτάται και το z. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι συνάρτηση μόνο του y

Κατά συνέπεια η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (4.6.1.2) ανάγεται στην κανονική διαφορική εξίσωση:

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{du^2}{dy^2}=0 \qquad (4.6.1.5)$$

(Στην παραπάνω εξίσωση το σύμβολο d()/dx συμβολίζει την κανονική παράγωγο και όχι το ολικό διαφορικό) !!!!!!

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{du^2}{dy^2}=0 \qquad (4.6.1.5)$$

Αφού η κλίση της πίεσης *dp/dx* είναι ανεξάρτητη του y, μπορώ να ολοκληρώσω την u.

Εκτελώντας την πράξη της ολοκλήρωσης δυό φορές:

$$u(y)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+Ay+B\right) \qquad (4.6.1.6)$$

Όπου *A* και *B* σταθερές ολοκληρώσεως, οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις οριακές συνθήκες

Για $y = 0$ $\quad u=0 \quad \Rightarrow B=0$

Για $y = h$ $\quad u=U \quad \Rightarrow A=-\frac{dp}{dx}\frac{h}{2}+\mu\frac{U}{h}$

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + Ay + B\right) \qquad (4.6.1.6)$$

$$B = 0 \qquad A = -\frac{dp}{dx}\frac{h}{2} + \mu\frac{U}{h}$$

$$u(y) = \frac{y}{2\mu}(h - y)\left(-\frac{dp}{dx}\right) + \frac{y}{h}U$$

$$u(y) = \frac{y}{2\mu}(h-y)\left(-\frac{dp}{dx}\right) + \frac{y}{h}U$$

Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς x:

$$\Rightarrow \frac{d^2 p}{dx^2} = 0$$

Κατά συνέπεια η κλίση της πίεσης είναι γραμμική *dp/dx=σταθερά* και:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p(L) - p(0)}{L} = 0$$

$$\Rightarrow u(y) = -\mu \frac{y}{h}U$$

ΡΟΗ ΠΡΟΕΡΧΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΚΙΝΗΣΗ ΠΛΑΚΑΣ ΣΕ «ΑΠΕΙΡΟ» ΧΩΡΟ

- Ουσιαστικά πρόκειται για το πρόβλημα της ροής Couette, Αρχικά και οι δύο πλάκες ήταν ακίνητες, το ρευστό σε ισορροπία, και ξαφνικά κινείται η μία πλάκα με σταθερή ταχύτητα. Εξετάζουμε το φαινόμενο για πολύ μικρούς χρόνους από την έναρξη της ροής.
- Προφανώς η ροή είναι μη μόνιμη.
- Η «διαταραχή» που έχει προκληθεί από την κίνηση της πλάκας δεν έχει φτάσει στο κάτω όριο: Η ακριβής θέση του κάτω ορίου δεν επηρεάζει λοιπόν το φαινόμενο γι' αυτό μπορούμε να υποθέσουμε πως ο χώρος είναι «άπειρος» ή «ημιάπειρος».

Οι εξισώσεις της κίνησης ενός νευτώνειου ασυμπίεστου ρευστού απλοποιούνται στις παρακάτω, είναι παρόμοιες με αυτές της ροής Hele-Shaw και της ροής Couette : Πρέπει απλώς να πάρουμε υπόψη μας ότι η ροή είναι μη μόνιμη

- Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (4.6.2.1)$$

- Εξισώσεις Navier Stokes

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.6.2.2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (4.6.2.3\alpha)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \qquad (4.6.2.3\beta)$$

•Λόγω της φύσης του προβλήματος είναι καλό να θέσουμε y=0 στην επιφάνεια της κινούμενης πλάκας (αλλαγή συντεταγμένων)

Α) Για την ταχύτητα έχουμε την συνθήκη μη ολισθήσεως.

$$y = 0 \qquad u = U \qquad t>0$$

Β) Η συνθήκη ότι η διαταραχή δεν έχει φθάσει στο κάτω άκρο της πλάκας εκφράζεται:

$$y \to \infty \qquad u = 0 \qquad t>0$$

Γ) Η αρχική συνθήκη γράφεται:

$$t = 0 \quad u = 0$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς x, συμπεραίνουμε ότι η κλίση της πίεσης είναι σταθερή. Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι δεν υπάρχει διαφορά πίεσης στα δύο άκρα :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται εξίσωση διάχυσης.

- Εμφανίζεται σε πολλά προβλήματα φυσικής και επιστήμης μηχανικού
- (διάχυση θερμότητας, μάζας, κίνησης υπόγειου νερού...)

<u>Μέθοδοι επίλυσης της εξίσωσης της διάχυσης:</u>

- Χρήση των **μετασχηματισμών Laplace**

- **Μέθοδος ομοιότητας.** Η μέθοδος αυτή είναι εφαρμόσιμη για την περίπτωση περίπτωση ημιάπειρου χώρου. Πραγματοποιούμε έναν μετασχηματισμό των εξαρτημένων μεταβλητών.

- Μετασχηματισμός της άγνωστης συνάρτησης. Εφαρμόζεται όταν ο χώρος της λύσης είναι πεπερασμένος

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Πραγματοποιώ τον μετασχηματισμό:

$$\theta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

$$\Rightarrow u(y,t) \to Uf(\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U\frac{df}{d\theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = U\frac{y}{2}\frac{d\left(\left[\nu t\right]^{-1/2}\right)}{dt} = -U\frac{y}{4}\frac{1}{\sqrt{\nu} t^{\frac{3}{2}}}\frac{df}{d\theta} = -U\frac{y}{4}\frac{1}{\sqrt{\nu} t^{\frac{3}{2}}}\frac{df}{d\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{df}{dy} = U\frac{df}{d\theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = U\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\frac{d\left(y\right)}{dy}\frac{df}{d\theta} = U\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\frac{df}{d\theta}$$

Είχαμε βρει ότι:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \frac{df}{d\theta} \qquad \theta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

Για να υπολογίσω την δεύτερη παράγωγο κάνω τις παρακάτω πράξεις:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(U \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \frac{df}{d\theta}\right) = U \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{d\theta}\right) =$$

$$= U \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{df}{d\theta}\right)\frac{dy}{d\theta} = U \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{df}{d\theta}\right)\frac{1}{2\sqrt{\nu t}} = U \frac{1}{4\nu t} \frac{d^2 f}{d\theta^2}$$

Θέλω να εκφράσω την εξίσωση της θερμότητας συναρτήσει των συντεταγμένων θ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \theta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -U \frac{y}{4} \frac{1}{\sqrt{\nu} t^{\frac{3}{2}}} \frac{df}{d\theta} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \frac{1}{4\nu t} \frac{d^2 f}{d\theta^2}$$

$$\Rightarrow -U \frac{y}{4} \frac{1}{\sqrt{\nu} t^{\frac{3}{2}}} \frac{df}{d\theta} = U \frac{\nu}{4\nu t} \frac{d^2 f}{d\theta^2} \qquad \Rightarrow -\frac{y}{\sqrt{\nu} t^{\frac{1}{2}}} \frac{df}{d\theta} = \frac{d^2 f}{d\theta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{d\theta^2} + 2\theta \frac{df}{d\theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + 2\theta \frac{df}{d\theta} = 0 \qquad u(y,t) = Uf(\theta) \qquad \theta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

Ψάχνω τις οριακές συνθήκες της παραπάνω εξίσωσης

Α) Για την ταχύτητα έχουμε την συνθήκη μη ολισθήσεως.

$y = 0$ $\quad u = U$ όμως $y = 0 \Rightarrow \theta = 0$, $f(\theta) = 1$

Β) Η συνθήκη ότι η διαταραχή δεν έχει φθάσει στο κάτω άκρο της πλάκας εκφράζεται:

$y \to \infty$ $\quad u = 0$ όμως $y \to \infty \Rightarrow \theta \to \infty$, $f(\theta) = 0$

Γ) Η αρχική συνθήκη γράφεται:

$t = 0 \quad u = 0$ όμως $t = 0 \Rightarrow \theta \to \infty$, $f(\theta) = 0$

Έχω την κανονική διαφορική εξίσωση: $$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + 2\theta \frac{df}{d\theta} = 0$$

Με τις οριακές συνθήκες: για $\theta = 0 \quad f(\theta) = 1$

για $\theta \to \infty \quad f(\theta) = 0$

θέτω: $$f' = \frac{df}{d\theta} \qquad \Rightarrow \frac{d\ f'}{d\theta} + 2\theta f' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\ f'}{f'} = -2\theta d\theta$$

Ολοκληρώνω την παραπάνω σχέση

$$\ln f' = -\theta^2 + \hat{A} \qquad \Rightarrow f' = e^{-\theta^2 + \hat{A}} = e^{\hat{A}} e^{-\theta^2} = Ae^{-\theta^2}$$

$$\frac{df}{d\theta} = f' = Ae^{-\theta^2}$$

Ολοκληρώνω και πάλι: $f = A\int_0^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta + B$

Οι σταθερές Α και Β μπορούν να προσδιοριστούν από τις οριακές συνθήκες

για $\theta = 0$ έχω $f(\theta) = 1 \Rightarrow 1 = A\int_0^{0} e^{-\theta^2} d\theta + B \Rightarrow B = 1$

για $\theta \rightarrow \infty$ $f(\theta) = 0 \Rightarrow A\int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta + 1 = 0$

Από βιβλία μαθηματικών βρίσκω ότι: $I = \int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\Rightarrow A = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$f = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta \qquad \text{όπου} \qquad B = 1 \qquad A = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές ολοκλήρωσης στην εξίσωση:

$$f = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta \quad \Rightarrow \frac{u(y,t)}{U} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta \qquad \theta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

Στα ανώτερα μαθηματικά ορίζονται η συνάρτηση λάθους erf(x) και η συμπληρωματική συνάρτηση λάθους erfc(x)

με τις παρακάτω εκφράσεις

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-x^2} dx \qquad erfc(x) = 1 - erf(x)$$

Μπορώ λοιπόν να εκφράσω το πεδίο ταχυτήτων με τις πιο συμπαγείς εκφράσεις:

$$\frac{u(y,t)}{U} = 1 - erf\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

Από μαθηματικούς πίνακες βρίσκω ότι $erfc(1,5) = 0.04 \cong 0$

Κατά συνέπεια η ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα για:

$$\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} > \frac{3}{2}$$

Το στρώμα νερού για το οποίο η διαταραχή που έχει προκληθεί από την κίνηση της πλάκας μπορεί να εκτιμηθεί σε:

$$\delta = 3\sqrt{\nu t}$$

Η απόσταση δ ονομάζεται πάχος της οριακής στιβάδας.

Εάν εξετάσουμε την σχέση :

$$\delta = 3\sqrt{\nu t}$$

Είναι φανερό ότι:

•Ο ρόλος του ιξώδους στην διάχυση της ορμής
μέσα στο ρευστό είναι σημαντικός

•Το πάχος της οριακής στιβάδας μεγαλώνει αργά:
Αυτό συμβαίνει επειδή η ροή που εξετάσαμε είναι στρωτή.
Για τυρβώδεις ροές η μεταφορά ορμής είναι πολύ ταχύτερη

ΡΟΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΠΛΑΚΩΝ ΑΠΟ ΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ Η ΜΙΑ ΕΙΝΑΙ ΑΚΙΝΗΤΗ ΚΑΙ Η ΑΛΛΗ ΑΡΧΙΣΕ ΞΑΦΝΙΚΑ ΝΑ ΚΙΝΕΙΤΑΙ

- Πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα με προηγουμένως με την διαφορά ότι εξετάζουμε τη ροή και για μεγαλύτερους χρόνους όταν η διαταραχή έχει φτάσει στην ακίνητη πλάκα (σε απόσταση *h* από την κινούμενη).

- Όπως είχαμε δει το πεδίο ταχυτήτων περιγράφεται από την εξίσωση της διάχυσης:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (4.6.3.1)$$

Θέτουμε y=0 στην επιφάνεια της κινούμενης πλάκας

Για την ταχύτητα έχουμε την συνθήκη μη ολισθήσεως.

A) $y = 0$ $u = U$ t>0 U η σταθερή ταχύτητα της πλάκας

A) $y \to h$ $u = 0$ t>0 h το πλάτος της πλάκας

Γ) Η αρχική συνθήκη γράφεται:

$$t = 0 \quad u = 0$$

Η μέθοδος της ομοιότητας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο πρόβλημα αυτό, επειδή η απόσταση ανάμεσα στις δύο πλάκες πρέπει να θεωρηθεί πεπερασμένη.

Εισάγουμε τη νέα μεταβλητή: $\phi(y,t) = U\left(1-\frac{y}{h}\right) - u$ (4.6.3.2)

Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την εξίσωση της διάχυσης και τις οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad (4.6.3.3)$$

φ(0,t)=0 για t>0

φ(h,t)=0 για *t>0*

έχουμε δηλαδή ομογενείς οριακές συνθήκες!

Με τον μετασχηματισμό αυτό μετατρέψαμε τις οριακές συνθήκες από μη ομογενείς σε ομογενείς (έχουμε την ίδια οριακή συνθήκη στα δύο άκρα)

Μία μερική λύση της (4.6.3.3) που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες όχι όμως και τις αρχικές είναι η:

$$\exp(-n^2\pi^2 \frac{\nu t}{h^2}) \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) \qquad (4.6.3.4)$$

- Για να βρω τη λύση κατασκευάζω μία σειρά κάθε όρος της οποίας αποτελείται από την (4.6.3,4) πολλαπλασιασμένο με μία σταθερά An. Οι σταθερές αυτές θα προσδιοριστούν από την απαίτηση της ικανοποίησης της αρχικής συνθήκης

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi y}{h} = \phi(y,0) = U\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi y}{h} = \phi(y,0) = U\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

Για να προσδιορίσω τις σταθερές An πολλαπλασιάζω την παραπάνω εξίσωση με $\sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$

και ολοκληρώνω από 0 έως h.

Ξέροντας τις βασικές σχέσεις της τριγωνομετρίας:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

Προκύπτει ότι:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, δηλαδή:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi y}{h} = U\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad n \neq m \qquad \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}$$

Προκύπτει ότι : $A_n = \frac{2U}{h}\int_0^h \left(1-\frac{y}{h}\right)\sin\frac{n\pi y}{h}dy = \frac{2U}{\pi n}$

$$\Phi(y,t) = \frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(-n^2\pi^2\frac{\nu t}{h^2}\right)\sin\frac{ny\pi}{h}$$

Αντικαθιστώντας πίσω στην (4.6.3.2) $\left(\phi(y,t) = U\left(1-\frac{y}{h}\right) - u \right)$

$$u(y,t) = U\left(1-\frac{y}{h}\right) - \frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(-n^2\pi^2\frac{\nu t}{h^2}\right)\sin\frac{ny\pi}{h} \qquad (4.6.3.7)$$

$$u(y,t) = U(1-\frac{y}{h}) - \frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(-n^2\pi^2\frac{\nu t}{h^2}\right)\sin\frac{ny\pi}{h}$$

(4.6.3.7)

Για μικρούς χρόνους ($t \ll \frac{h^2}{\nu}$) η (4.6.3.7) προσεγγίζει

την λύση του προβλήματος της «πλάκας με άπειρο πάχος»

Αντίθετα για μεγάλους χρόνους $\frac{t\nu}{h^2} \to \infty$

η (4.6.3.7) ταυτίζεται με τη λύση της μόνιμης ροής.

ΜΟΝΙΜΗ ΕΡΠΟΥΣΑ ΡΟΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΜΕΣΑ ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΣΩΛΗΝΑ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Εξετάζουμε ένα πρόβλημα ανάλογο με τη ροή ανάμεσα στις δύο πλάκες:

-Σε αγωγό **κυλινδρικής** διατομής (σωλήνα) λαμβάνει χώρα στρωτή έρπουσα ροή

-Ο χρόνος από την έναρξη του φαινομένου είναι αρκετά μεγάλος ώστε η ροή να θεωρηθεί μόνιμη

-Στις δύο άκρες του αγωγού επιβάλλεται μία δεδομένη πίεση Για να έχουμε ροή, οι πιέσεις στα δύο άκρα πρέπει να είναι διαφορετικού μεγέθους.

-Οι δυνάμεις όγκου είναι αμελητέες

- Μπορούμε επιβάλουμε δεδομένη πίεση στο ένα άκρο του αγωγού συνδέοντας το άκρο αυτό με μία δεξαμενή.
- Αν η απόσταση του πυθμένα από την ελεύθερη επιφάνεια είναι Η, τότε η πίεση στο άκρο με το οποίο συνδέεται η δεξαμενή είναι:

$$P_1 = P_a + \rho g H$$

Όπου P_a η ατμοσφαιρική πίεση.

Αν κανονίζουμε τις συνθήκες διεξαγωγής του πειράματος να είναι τέτοιες ώστε το ρευστό στο άκρο κατάντη να εκρέει ελεύθερα στην ατμόσφαιρα, τότε στο άκρο κατάντη έχουμε ατμοσφαιρική πίεση.

$$P_2 = P_a$$

Κατά συνέπεια: $P_1 - P_2 = \rho g H$

Εφόσον η ροή είναι μόνιμη, οι παράγωγοι της ταχύτητας και της πίεσης είναι ίσοι με το μηδέν.

Στο τοίχωμα του αγωγού εφαρμόζεται η συνθήκη μη ολισθήσεως :όλες οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι ίσες με το μηδέν.

Κατά συνέπεια είναι συμφέρον να χρησιμοποιήσουμε τις κυλινδρικές συντεταγμένες: Τα φαινόμενα σε μία διατομή του αγωγού (z=σταθερό) περιγράφονται από τις πολικές συντεταγμένες ρ,φ. Οι απόσταση από την αρχή του σωλήνα, από την συντεταγμένη z.

Λόγω της συμμετρίας του φαινομένου η ροή είναι παράλληλη στα τοιχώματα του αγωγού. ($U_\rho=0$, $U_\varphi=0$).

Λόγω της συμμετρίας έχουμε ότι όλα τα μεγέθη είναι ανεξάρτητα από το φ.

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε: $$\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \qquad (4.8.2)$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα εξαρτάται μόνο από το z

Παίρνουμε υπόψη μας τα παραπάνω και γράφουμε τις εξισώσεις Navier Stokes σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$-\frac{\partial P}{\partial \rho} = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\rho \partial \phi} = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{d^2 U_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU_z}{d\rho} \right] = 0$$

Παίρνοντας υπόψη μας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το πεδίο της πίεσης δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες ρ και φ

Παίρνοντας υπόψη μας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το πεδίο της πίεσης δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες ρ και φ.

$$P = P(z)$$

Από την 4.8.2 $\dfrac{\partial U_z}{\partial z} = 0$ προκύπτει ότι η συνιστώσα U_z είναι ανεξάρτητη του z

$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{dP}{dz} = const = G \qquad (4.8.7)$$

$$\mu\left(\frac{d^2U_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_z}{dr}\right) = -G = const \qquad (4.8.8)$$

Η (4.8.7) ολοκληρώνεται και δίνει

$$P(z) = \alpha Z + \beta$$

όπου α και β σταθερές.

- Η πίεση στην έξοδο του σωλήνα z=L είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Αυτή θεωρείται στις περισσότερες εφαρμογές μηχανικού ίση με το μηδέν.
- Η πίεση στην είσοδο του σωλήνα z=0 μπορεί να προσεγγιστεί με $\rho g H$

Οι συνθήκες αυτές εκφράζονται μαθηματικά ως εξής:

$$\alpha L + \beta = 0$$
$$\beta = \rho g H$$

Το οποίο έχει σαν λύση:

$$\beta = \rho g H \qquad \alpha = -\frac{\rho g H}{L} \qquad P(z) = \alpha Z + \beta$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση γα την πίεση γράφεται:

$$P(z) = \rho g H - \frac{\rho g H}{L} Z$$

Η διαφορική εξίσωση γα το πεδίο ταχυτήτων είναι η:

$$\mu\left(\frac{d^2U_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_z}{dr}\right)=-G=const$$

- Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση μπορεί να αναχθεί σε μία πρωτοβάθμια εξίσωση:Αν θέσουμε

$$K=\frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Προκύπτει ότι:

$$\frac{dK}{dr}+\frac{1}{r}K=-\frac{G}{\mu}$$

$$\frac{dK}{dr} + \frac{1}{r}K = -\frac{G}{\mu} \qquad\qquad K = \frac{\partial U_z}{\partial r} = \frac{dU_z}{dr}$$

Η αντίστοιχη ομογενής γράφεται:

$$\frac{dK}{dr} + \frac{1}{r}K = 0$$

Η οποία έχει σαν λύση: $K_H = \frac{1}{r} + \hat{c}$

ή παραλείποντας την αυθαίρετη σταθερά $K_0 = \frac{1}{r}$

Κατά συνέπεια: $K = K_0 \int \frac{1}{K_0}\left(-\frac{G}{\mu}\right)dr$

$$K = \frac{1}{r}\left(-\frac{G}{\mu}\frac{r^2}{2} + \hat{C}\right) = -\frac{G}{2\mu}r + \frac{C_1}{r}$$

$$U_z = -\frac{G}{4\mu}r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

$$U_z = -\frac{G}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης προσδιορίζονται:
-Από τις οριακές συνθήκες
-Από την απαίτηση να μην παραβιάζει η λύση τις αρχές της

Φυσικής

- Για r=0, η ταχύτητα παίρνει άπειρες αρνητικές τιμές.

 (Η ροή θεωρείται «πεπερασμένη» και μάλιστα οι ταχύτητες μικρές –έρπουσα ροή. Επίσης η ταχύτητα πρέπει να είναι θετική κατά την διεύθυνση του άξονα των z). Κατά συνέπεια: $C_1 = 0$

Για r=a ισχύει η συνθήκη της μη ολίσθησης $(U_z = 0)$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{Ga^2}{\mu} \qquad \Rightarrow U_z(r) = \frac{(P_A - P_B)}{L} \frac{(a^2 - r^2)}{4\mu}$$

Η παροχή μέσα στον κύλινδρο υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$Q = \int_0^a 2\pi r U_z dr = \frac{(P_A - P_B)}{L} \frac{\pi}{2\mu} \int_0^a \left(a^2 - r^2\right) r dr = \frac{(P_A - P_B)}{L} \frac{\pi a^4}{8\mu}$$

- επίσης:

$$Q = \frac{(P_A - P_B)}{L} \frac{\pi a^4}{8\mu} = \frac{\Delta p}{L} \frac{\pi a^4}{8\mu}$$