ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ-
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER STOKES

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΕ ΕΝΑΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΟ ΟΓΚΟ ΡΕΥΣΤΟΥ

- Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την ισορροπία των δυνάμεων οι οποίες ασκούνται σε ένα τυχόν σωματίδιο ρευστού.
- Παρακολοθούμε την κίνηση ενός στοιχειώδους όγκου ρευστού *V(t)*. Ο όγκος αυτός περικλείεται από μία νοερή επιφάνεια *S(t)* η οποία αν και παραμορφώνεται κατά την ροή περικλείει πάντα τα ίδια σωματίδια ρευστού.
- Γνωρίζουμε ότι:

ορμή = μάζα x ταχύτητα

Χρησιμοποιώντας για τη μάζα του σωματίδιου ρευστού που εξετάζουμε την σχέση:

$$dm = \rho dV$$

Η ορμή του σωματιδίου εκφράζεται με το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\iiint_{V(t)} \rho\left(\vec{x},t\right)\vec{U}\left(\vec{x},t\right)dV$$

Λαμβάνουμε υπόψη μας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

Ρυθμός αλλαγής της ορμής στο σωματίδιο= δυνάμεις εξασκούμενες στο σωματίδιο αυτό

Θεωρούμε ότι οι δυνάμεις που δρουν στο σωματίδιο, είναι τόσο δυνάμεις όγκου F_V, όσο και επιφανειακές δυνάμεις F_S

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} \rho\vec{U}dV = \vec{F}_V + \vec{F}_S$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} \rho\vec{U}dV = \vec{F}_V + \vec{F}_\Sigma$$

Ονομάζουμε τις δυνάμεις ανά μονάδα όγκου: $\rho\vec{f}$

$$\vec{F}_V = \iiint_{V(t)} \rho\left(\vec{x},t\right)\vec{f}\left(\vec{x},t\right)dV$$

- Ονομάζουμε τις δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας $\vec{\Sigma}$

Οι δυνάμεις αυτές μπορούν να εκφραστούν σαν συνάρτηση του τανυστή τάσεων:

$$\Sigma_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{ή} \quad \vec{\Sigma} = \hat{\sigma}\vec{n}$$

Όπου *ni* το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια S.
Κατά συνέπεια, εφαρμόζωντας το θεώρημα του Green:

$$\vec{F}_{S(t)} = \iint_{S(t)} \hat{\sigma}\vec{n}dS = \iiint_{V(t)} div\hat{\sigma}dV$$

Παίρνοντας υπόψη μας τα παραπάνω, η εξίσωση για τον ρυθμό αλλαγής της ορμής γράφεται:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} \rho\vec{U}dV = \vec{F}_V + \vec{F}_S$$

όπου $\vec{F}_V = \iiint_{V(t)} \rho\left(\vec{x},t\right)\vec{f}\left(\vec{x},t\right)dV$ και $\vec{F}_S = \iiint_{V(t)} div\sigma dV$

κατά συνέπεια: $$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} \rho\vec{U}dV = \iiint_{V(t)}\left(\rho\vec{f} + div\hat{\sigma}\right)dV$$

Παίρνοντας υπόψη μας το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds, όπου $\Phi = \rho\vec{U}$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} \rho\vec{U}dV = \iiint_{V(t)}\left[\frac{d\rho\vec{U}}{dt} + \rho\vec{U}div\vec{U}\right]dV = \iiint_{V(t)}\left[\rho\frac{d\vec{U}}{dt} + \vec{U}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{U}\right)\right]dV$$

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{V(t)} \rho\vec{U}dV = \iiint\limits_{V(t)} \left[\rho\frac{d\vec{U}}{dt} + \vec{U}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{U} \right) \right] dV$$

Παίρνοντας υπόψη μας την εξίσωση της συνέχειας:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{U} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\iiint\limits_{V(t)} \rho\vec{U}dV = \iiint\limits_{V(t)} \left[\rho\frac{d\vec{U}}{dt} \right] dV$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{V(t)} \rho\vec{U}dV = \iiint\limits_{V(t)} \left(\rho\vec{f} + div\hat{\sigma} \right) dV$$

γράφεται:

$$\iiint\limits_{V(t)} \left(\rho\frac{d\vec{U}}{dt} - \rho\vec{f} - div\hat{\sigma} \right) dV = 0$$

$$\iiint\limits_{V(t)} \left(\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \rho \vec{f} - div\hat{\sigma} \right) dV = 0$$

Στην παραπάνω εξίσωση η ολοκλήρωση γίνεται σε έναν αυθαίρετο όγκο V. Για να είναι το ολοκλήρωμα ίσο με το μηδέν πρέπει η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα να είναι ίση με το μηδέν

$$\Rightarrow \rho \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{f} + div\hat{\sigma}$$

- Η εξίσωση αυτή (εξίσωση δυναμικής ισορροπίας) γράφεται και με τις παρακάτω μορφές

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \rho f_i + div\sigma_{ij}$$

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \sigma_{ij,j}$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)=\rho f_i+\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$ **Γενική εξίσωση δυναμικής ισορροπίας**

•Η παραπάνω διανυσματική εξίσωση (=ή τρεις αλγεβρικές) είναι από τις θεμελιώδεις σχέσεις της Ρευστομηχανικής. Ισχύουν για κάθε ρευστό, συμπιεστό ή ασυμπίεστο, νευτώνειο ή μη νευτώνειο, για στρωτή ή τυρβώδη ροή.

- Δεν αποτελεί όμως ένα κλειστό, «επιλύσιμο» σύστημα εξισώσεων, παρ' όλο που μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας και την εξίσωση της συνέχειας:
- Έχουμε στην διάθεση μας τέσσερις εξισώσεις και 10 αγνώστους: τρεις συνιστώσες, έξι συνιστώσες του τανυστή τάσεων, και την πίεση (ή την πυκνότητα).
- Είναι λοιπόν απαραίτητο να εκφράσουμε τις συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων βάσει των λοιπόν άγνωστων μεγεθών

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ

- Για την περίπτωση νευτώνειων ρευστών έχουμε τις παρακάτω σχέσεις μεταξύ των επιφανειακών τάσεων και των λοιπών μεγεθών:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Όπου:

δ_{ij} Το δέλτα του Kronecker

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\left(div\vec{U}\right)\delta_{ij}\right) \quad , \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

Για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής: $div\vec{U} = 0$

$$\Rightarrow \tau_{ij} = 2\mu e_{ij} = \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

Για την ροή που είχαμε εξετάσει στο εισαγωγικό κεφάλαιο:

$$\tau = \tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right) = \mu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

Όμως V=0 $\Rightarrow \tau = \mu \dfrac{\partial U}{\partial y} = \mu \dfrac{U_0}{h}$

Η εξίσωση που είχαμε χρησιμοποιήσει για να ορίσουμε το ιξώδες, αντιστοιχεί σε μία απλοποιημένη μορφή της εξίσωσης συμπεριφοράς

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES

- Θα εξετάσουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των νευτώνειων ρευστών
- Είχαμε δει ότι η γενική εξίσωση δυναμικής γράφεται:

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)=\rho f_i+\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Για νευτώνειο ρευστό και ασυμπίεστη ροή: $\sigma_{ij}=-P\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)=\rho f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-P\delta_{ij}\right)+2\mu\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}$$

Παραγωγίζοντας τον τανυστή $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial U_j}{\partial x_j}\right]\right)$$

Εισαγάγουμε τον τελεστή Stokes $\nabla^2 U_i$

$$\nabla^2 U_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad :$$

Επίσης: $\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = div\vec{U} = 0$ για ασυμπίεστη ροή

$$\Rightarrow \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\nabla^2 U_i$$

Έχουμε αποδείξει ότι για ασυμπίεστη ροή νευτώνειων ρευστών:

α) $$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)=\rho f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-P\delta_{ij}\right)+2\mu\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}$$

β) $$\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\nabla^2 U_i$$

Προφανώς: $$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-P\delta_{ij}\right)=-\frac{\partial\left(P\delta_{ii}\right)}{\partial x_i}=-\frac{\partial P}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)=\rho f_i-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\mu\nabla^2 U_i$$

Η εξίσωση Navier Stokes για ασυμπίεστη ροή γράφεται:

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)=\rho f_i-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\mu\nabla^2 U_i$$

Και σε διανυσματική μορφή

$$\rho\frac{d\vec{U}}{dt}=\rho\vec{f}-gra\vec{d}P+\mu\nabla^2\vec{U}$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει την δυναμική ισορροπία των εξής μεταβαλλόμενων δυνάμεων:

- Των δυνάμεων αδρανείας
- Των εξωτερικών δυνάμεων (συνήθως δυνάμεων βαρύτητας)
- Των δυνάμεων που προκύπτουν από τις διαφορές πιέσεως
- Των δυνάμεων του ιξώδους

Για να έχουμε ένα κλειστό (επιλύσιμο) σύστημα εξισώσεων πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την εξίσωση της συνέχειας

Θα έχουμε λοιπόν ένα μη γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, το οποίο αποτελείται από:

4 Εξισώσεις (*3 εξισώσεις δυναμικής+εξίσωση συνέχειας*)
4 Αγνώστους (*3 συνιστώσες ταχύτητας ροής+ την πίεση)*

Για να είναι το πρόβλημα καλά τοποθετημένο θα πρέπει να ορίζουμε για κάθε περίπτωση τις αρχικές και οριακές συνθήκες

Το γενικό μαθηματικό ομοίωμα της ασυμπίεστης ροής νευτώνειων ρευστών έχει την εξής μορφή σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

1. Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\frac{\partial U_3}{\partial x_3}=0$$

2. Εξισώσεις Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}+U_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)=\rho f_1-\frac{\partial P}{\partial x_1}+\mu\nabla^2U_1$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_2}{\partial t}+U_1\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)=\rho f_2-\frac{\partial P}{\partial x_1}+\mu\nabla^2U_2$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_3}{\partial t}+U_1\frac{\partial U_3}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_3}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)=\rho f_3-\frac{\partial P}{\partial x_3}+\mu\nabla^2U_3$$

Εκφράζοντας το παραπάνω πρόβλημα με τις συντεταγμένες x, y, z και τις συνιστώσες u,v,w

1. Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0$$

2. Εξισώσεις Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho f_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\nabla^2 u$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho f_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\nabla^2 v$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial w}\right)=\rho f_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\nabla^2 w$$

Αρχικές συνθήκες:

Τιμές της πίεσης και της ταχύτητας στον χρόνο t=0

- Οριακές συνθήκες

Συνθήκες μη ολισθήσεως στις στερεές επιφάνειες: Όπου υπάρχει επαφή το ρευστό κινείται με την ίδια ταχύτητα με το στερεό

Γενική μορφή διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού με μερικές παραγώγους

- Αυτές γράφονται με την μορφή

$$A\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=D$$

Όπου οι συντελεστές A,,B,C,D είναι συναρτήσεις των x, y, Φ ή των πρώτων παραγώγων της Φ, αλλά όχι των δεύτερων παραγώγων της Φ.

Ο χαρακτήρας της εξίσωσης εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης

$$\Delta = B^2 - A\cdot C$$

$$A\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=D$$

$$\Delta = B^2 - A\cdot C$$

Για $\Delta < 0$ η εξίσωση καλείται ελλειπτική

Για $\Delta = 0$ η εξίσωση καλείται παραβολική

Για $\Delta > 0$ η εξίσωση καλείται υπερβολική

- Μερικές κλασικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους είναι οι εξής:

<u>Εξίσωση Laplace</u>

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

$$B^2-4AC=0-4\cdot 1\cdot 1=-4<0$$

ελλειπτική

Εξίσωση διάχυσης ή εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

Έχουμε B=0 και C=0

$$B^2 - 4AC = 0 - 0 = 0$$

Έχουμε λοιπόν μία παραβολική εξίσωση

Εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = +4 > 0$$

Έχουμε λοιπόν μία υπερβολική εξίσωση

Τα φυσικά φαινόμενα τα οποία περιγράφονται από εξίσωση μίας ορισμένης τυπολογίας

- Για αρκετά προβλήματα η Navier Stokes μπορεί να αναχθεί σε ένα από τα τρία παραπάνω προβλήματα

- Επίσης άλλα προβλήματα της υδραυλικής μπορούν να αναχθούν σε έναν από τους βασικούς τύπους.

Μόνιμη ροή ανάμεσα σε δύο παράλληλες πλάκες (Ροή Hele-Shaw)

- Εξετάζουμε την επίπεδη ροή που λαμβάνει μεταξύ δύο επίπεδων πλακών οι οποίες έχουν απόσταση κατά την διεύθυνση y, *h* (h=ύψος.) Το μήκος τους είναι L
- Οι πλάκες είναι ακίνητες, παράλληλες, στον άξονα x.

  Μία διαφορά πίεσης είναι δυνατόν να τεθεί στα δύο άκρα της πλάκας
- Το πλάτος του ρευστού κατά την διεύθυνση *z* είναι πολύ μεγαλύτερη από το ύψος *h*. Κατά συνέπεια η ροή είναι όμοια στα επίπεδα κάθετα στον άξονα z

$$\frac{\partial .}{\partial z} = 0$$

- Λόγω των παραπάνω συνθηκών υποθέτουμε ότι η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας είναι η u $(v=w=0)$

- Οι ταχύτητες είναι μικρές ώστε οι όροι αδρανείας (μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης Navier Stokes) να παραλείπονται

- Η ροή μπορεί να θεωρηθεί ισόχωρος ή ασυμπίεστη

- Εξετάζουμε το φαινόμενο για αρκετά μεγάλο χρόνο μετά την έναρξη του. Θεωρούμε ότι έχει έρθει σε μία σταθερή κατάσταση. Κατά συνέπεια η ροή μπορεί να θεωρηθεί μόνιμη

Οι εξισώσεις της κίνησης ενός νευτώνειου ασυμπίεστου ρευστού απλοποιούνται στις παρακάτω:

- Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (4.6.1.1)$$

- Εξισώσεις Navier Stokes

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (4.6.1.2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad (4.6.1.3)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=0 \qquad (4.6.1.4)$$

Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος είναι :

A) Για την ταχύτητα έχουμε την συνθήκη μη ολισθήσεως.

$$y = 0 \qquad u = 0$$

$$y = h \qquad u = 0$$

B) Οι διαφορά πίεσης είναι Δp=p(x=L)-p(x=0)

Από την (4.6.1.3) και (4.6.1.4) συνεπάγεται ότι η πίεση είναι συνάρτηση μόνο του x

- Από την (4.6.1.1) συνεπάγεται ότι η ταχύτητα *u* δεν εξαρτάται από το x. Ξέρουμε όμως ότι δεν εξαρτάται και το z. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι συνάρτηση μόνο του y

Κατά συνέπεια η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (4.6.1.2) ανάγεται στην κανονική διαφορική εξίσωση:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{du^2}{dy^2} = 0 \qquad (4.6.1.5)$$

(Στην παραπάνω εξίσωση το σύμβολο d()/dx συμβολίζει την κανονική παράγωγο και όχι το ολικό διαφορικό)

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{du^2}{dy^2}=0 \qquad (4.6.1.5)$$

Αφού η κλίση της πίεσης *dp/dx* είναι ανεξάρτητη του y, μπορώ να ολοκληρώσω την συνάρτηση u.

Εκτελώντας την πράξη της ολοκλήρωσης δυό φορές:

$$u(y)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+Ay+B\right) \qquad (4.6.1.6)$$

Όπου *A* και *B* σταθερές ολοκληρώσεως, οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις οριακές συνθήκες

Για $y = 0$ $\quad u=0$ $\quad \Rightarrow B=0$

Για $y = h$ $\quad u=0$ $\quad \Rightarrow A=-\frac{dp}{dx}\frac{h}{2}$

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + Ay + B\right) \qquad (4.6.1.6)$$

$$B = 0 \qquad \Rightarrow A = -\frac{dp}{dx}\frac{h}{2}$$

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\, y\left(h - y\right) \qquad (4.6.1.7)$$

Η (4.6.1.7) δείχνει ότι:

- Το ρευστό ρέει στην αρνητική βαθμίδα πιέσεως
- Η κατανομή της ταχύτητας είναι παραβολική
- Η μέγιστη ταχύτητα βρίσκεται στη μέση της απόστασης των πλακών

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y\left(h-y\right) \qquad (4.6.1.7)$$

Αν παραγωγίσουμε την (4.6.1.7) ως προς x: $\frac{d^2 p}{dx^2} = 0$

Κατά συνέπεια η κλίση της πίεσης είναι γραμμική *dp/dx=σταθερά* και:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p(L) - p(0)}{L}$$

Προφανώς υπάρχει ροή μόνο αν υπάρχει διαφορά πίεσης ανάμεσα στις δύο πλάκες

Άλλο μέγεθος που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η παροχή Q μέσα από μία διατομή κάθετη στις δύο πλάκες

Άλλο μέγεθος που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η παροχή Q μέσα από μία διατομή κάθετη στις δύο πλάκες

$$Q = \iint_S u dS$$

Κατά συνέπεια:

$$Q_x = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int_0^h y\left(h - y^2\right)Bdy = -\frac{h^3 B}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

Όπου B το πλάτος της πλάκας

Μπορώ να ορίσω και τη μέση ταχύτητα: $u_m = Q/S$

$$u_m == -\frac{h^2 B}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$Q_x = -\frac{h^3 B}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

Και οι δύο εξισώσεις έχουν την δομή της εξίσωσης του Fourier (Fick, Darcy)

Ισχύει ο κυβικός νόμος για την παροχή

Μόνιμη ροή προερχόμενη από κίνηση πλάκας σε άπειρο χώρο (Ροή Couette)

- Εξετάζουμε την επίπεδη ροή που λαμβάνει μεταξύ δύο επίπεδων πλακών οι οποίες έχουν απόσταση κατά την διεύθυνση y, *h* (h=ύψος.) Το μήκος τους είναι L, θεωρείται πολύ μεγάλο
- Η πλάκες είναι , παράλληλες, στον άξονα x.

  Η κάτω πλάκα είναι ακίνητη, η πάνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα *U*
- Το πλάτος του ρευστού κατά την διεύθυνση *z* είναι πολύ μεγαλύτερη από το ύψος *h*. Κατά συνέπεια η ροή είναι όμοια στα επίπεδα κάθετα στον άξονα z

$$\frac{\partial .}{\partial z} = 0$$

•Λόγω των παραπάνω συνθηκών υποθέτουμε ότι η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας είναι η u ($v=w=0$)

- Οι ταχύτητες είναι μικρές ώστε οι όροι αδρανείας (μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης Navier Stokes) να παραλείπονται

•Η ροή μπορεί να θεωρηθεί ισόχωρος ή ασυμπίεστη

•Εξετάζουμε το φαινόμενο για αρκετά μεγάλο χρόνο μετά την έναρξη του. Θεωρούμε ότι έχει έρθει σε μία σταθερή κατάσταση. Κατά συνέπεια η ροή μπορεί να θεωρηθεί μόνιμη

•Δεν υπάρχει διαφορά πίεσης ανάμεσα στις δύο άκρες των πλακών

Οι εξισώσεις της κίνησης ενός νευτώνειου ασυμπίεστου ρευστού απλοποιούνται στις παρακάτω, είναι παρόμοιες με αυτές της ροής Hele-Shaw :

- Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (4.6.1.1)$$

•Εξισώσεις Navier Stokes

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (4.6.1.2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (4.6.1.3)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \qquad (4.6.1.4)$$

Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος είναι :

Α) Για την ταχύτητα έχουμε την συνθήκη μη ολισθήσεως.

$$y = 0 \qquad u = 0$$

$$y = h \qquad u = U$$

Β) Οι διαφορά πίεσης είναι Δp=p(x=L)-p(x=0)=0

Από την (4.6.1.3) και (4.6.1.4) συνεπάγεται ότι η πίεση είναι συνάρτηση μόνο του x

- Από την (4.6.1.1) συνεπάγεται ότι η ταχύτητα *u* δεν εξαρτάται από το x. Ξέρουμε όμως ότι δεν εξαρτάται και το z. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι συνάρτηση μόνο του y

Κατά συνέπεια η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (4.6.1.2) ανάγεται στην κανονική διαφορική εξίσωση:

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{du^2}{dy^2}=0 \qquad (4.6.1.5)$$

(Στην παραπάνω εξίσωση το σύμβολο d()/dx συμβολίζει την κανονική παράγωγο και όχι το ολικό διαφορικό) `

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{du^2}{dy^2}=0 \qquad (4.6.1.5)$$

Αφού η κλίση της πίεσης *dp/dx* είναι ανεξάρτητη του y, μπορώ να ολοκληρώσω την u.

Εκτελώντας την πράξη της ολοκλήρωσης δυό φορές:

$$u(y)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+Ay+B\right) \qquad (4.6.1.6)$$

Όπου *A* και *B* σταθερές ολοκληρώσεως, οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις οριακές συνθήκες

Για $y = 0$ $u=0$ $\Rightarrow B=0$

Για $y = h$ $u=U$ $\Rightarrow A=-\frac{dp}{dx}\frac{h}{2}-\frac{\mu U}{h}$

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + Ay + B\right) \qquad (4.6.1.6)$$

$$B = 0 \qquad A = -\frac{dp}{dx}\frac{h}{2} - \frac{\mu U}{h}$$

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 - \mu\frac{y}{h}U$$

- Η κατανομή της ταχύτητας είναι παραβολική
- Η μέγιστη ταχύτητα <u>δεν</u> βρίσκεται στη μέση της απόστασης των πλακών

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 - \mu\frac{y}{h}U$$

Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω εξίωση ως προς x:

$$\Rightarrow \frac{d^2 p}{dx^2} = 0$$

Κατά συνέπεια η κλίση της πίεσης είναι γραμμική *dp/dx=σταθερά* και:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p(L) - p(0)}{L} = 0$$

$$\Rightarrow u(y) = -\mu\frac{y}{h}U$$