ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Σκοπός της **κινηματικής** είναι η <u>περιγραφή</u> της κίνησης του ρευστού
- Τα αίτια που <u>δημιούργησαν</u> την κίνηση και η αναζήτηση των <u>δυνάμεων που την διατηρούν</u> είναι αντικείμενο της **δυναμικής**

Θα εξετάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο τις σχέσεις μεταξύ των θέσεων που παίρνουν οι στοιχειώδεις όγκοι του ρευστού και του χρόνου

Οι στοιχειώδεις αυτοί όγκοι είναι πολύ πιο μικροί από τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του ρευστού (αλλά πολύ μεγαλύτεροι από τις μέσες διαστάσεις των μορίων.

Για τον λόγο αυτό οι στοιχειώδεις όγκοι ονομάζονται σωματίδια

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

- **Περιγραφή Lagrange**: Παρακολουθούμε την κίνηση ενός σωματιδίου και καταγράφουμε όλες τις αλλαγές που λαμβάνουν χώρα απάνω στον στοιχειώδη αυτό όγκο .

  Ονομάζουμε το σωματίδιο $\vec{\xi}$ σύμφωνα με την θέση που κατείχε την στιγμή $t=t_0$ (<u>Σωματιδιακή ή υλική περιγραφή</u>)
- **Περιγραφή Euler:** Καταλαμβάνουμε μία θέση στον χώρο (σημείο $\vec{z}$) και παρατηρούμε όλα τα σωματίδια που περνάν από αυτό. (Χωρική περιγραφή)

Θεωρούμε αντίστοιχα δύο τρόπους παραγώγισης μίας ποσότητας *Φ* που εκφράζει μία ιδιότητα του ρευστού

- α) Την ολική παράγωγο ως προς τον χρόνο *t* :

  $$\frac{D\Phi}{Dt} \quad \acute{\eta} \quad \frac{d\Phi}{dt}$$

  όπου το $\vec{\xi}$ παραμένει σταθερό αλλά το $\vec{z}$ και το *t* μεταβάλλονται

- β) Την μερική παράγωγο ως προς τον χρόνο *t* :

  $$\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

  όπου το $\vec{z}$ παραμένει σταθερό αλλά το $\vec{\xi}$ και το *t* μεταβάλλονται

- Η ολική παράγωγος μας δίνει το ρυθμό της αλλαγής όπως αυτή καταγράφεται από έναν παρατηρητή κινείται με ένα σωματίδιο

- Η μερική παράγωγος μας δίνει το ρυθμό της αλλαγής όπως αυτή καταγράφεται σε ένα σταθερό σημείο

Για να βρούμε την σχέση μεταξύ της ολικής και της μερικής παραγώγου, εξετάζουμε την ιδιότητα Φ ενός σωματιδίου $\vec{\xi}$ το οποίο βρίσκεται

-στην χρονική στιγμή t στην θέση $\vec{z}$

-στην χρονική στιγμή t+dt στην θέση $\vec{z} + d\vec{z}$

και ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Κρατάμε τους πρώτους όρους από το παρακάτω ανάπτυγμα Taylor:

$$\Phi\left(\vec{z} + d\vec{z}, t + dt\right) = \Phi\left(\vec{z}, t\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} dz_i + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt \qquad i = 1, 2, 3$$

- Παίρνουμε υπόψη μας ότι $dz_i = U_i dt$

$$\Rightarrow d\Phi(\vec{z}, t) = \Phi\left(\vec{z} + d\vec{z}, t + dt\right) - \Phi(\vec{z}, t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\right) dt$$

Διαιρώ με τον όρο dt

$$\Rightarrow \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \Phi$$

- Η μεταβλητή Φ συμβολίζει ένα βαθμωτό (θερμοκρασία, πυκνότητα, συγκέντρωση..) ή ένα διανυσματικό μέγεθος (π.χ. ταχύτητα)
- Αν το Φ είναι βαθμωτό μέγεθος τότε $\nabla\Phi = gra\vec{d}\,\Phi$
- Αν το Φ είναι διανυσματικό μέγεθος τότε $\nabla\Phi = div\Phi$
- Έστω $\Phi = \vec{U}$. Τότε η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ ενός σωματιδίου $\vec{\xi}$ μπορεί να εκφραστεί μέσω της ολικής παραγώγου της ταχύτητας

$$\vec{\gamma} = \frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot di\vec{v}\vec{U}$$

Η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ αποτελείται από δύο όρους:

•Την τοπική επιτάχυνση $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$

•Την μεταθετική επιτάχυνση $\vec{U}di\vec{v}\vec{U}$

Μεταβολή όγκου ενός στοιχειώδους σωματιδίου

- Εξετάζουμε την μεταβολή στον χρόνο του όγκου και του σχήματος ενός σωματιδίου $\vec{\xi}$
- Θεωρούμε ότι για $t=0$ το σχήμα του σωματιδίου είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και ο όγκος του dV_0
- Για χρόνους $t>0$ το σωματίδιο κατά κανόνα παραμορφώνεται επειδή το πεδίο ροής δεν είναι (κατά κανόνα) ομοιόμορφο.

  Ονομάζουμε dV τον όγκο του σωματιδίου στο χρονικό αυτό σημείο και $\vec{x}$ τις συντεταγμένες του

Ο μετασχηματισμός $\vec{x} = \vec{x}\left(\vec{\xi}, t\right)$

παριστάνει μία αλλαγή συντεταγμένων από τις αρχικές συντεταγμένες στις συντεταγμένες που έχει το σωματίδιο στο τυχόν χρονικό σημείο t

- Κατά συνέπεια είναι γνωστό από τη μαθηματική ανάλυση ότι οι όγκοι dV και dV_0 συνδέονται με την σχέση: $dV = \zeta\, dV_0$

όπου:

$$\zeta = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\[2ex] \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\[2ex] \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να να υπολογίσουμε την ολική παράγωγό της ιακωβινής μετασχηματισμού ζ:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) \zeta = \zeta \, div \vec{U}$$

Η απόκλιση της ταχύτητας, δηλ. το $div\vec{U}$

φανερώνει από φυσική πλευρά τον ρυθμό διαστολής ή συστολής ενός στοιχειώδους σωματιδίου

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΟΥ REYNOLDS

- Ορίζουμε το μέγεθος *F(t)* με το ολοκλήρωμα της μορφής:

$$F(t) = \iiint_{V(t)} \Phi(\vec{x}, t)\, dV$$

Όπου η συνάρτηση F(t) μπορεί να είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, (πυκνότητα, θερμοκρασία), διανυσματικό μέγεθος (ταχύτητα) ή τανυστικό μέγεθος

Λόγω της ροής ο όγκος που εξετάζουμε αλλάζει σχήμα συναρτήσει του χρόνου: *V=V(t)*.

Σε πολλά προβλήματα της Μηχανικής Ρευστών απαιτείται να υπολογιστεί η ολική παράγωγος του *F(t)*

$$\frac{DF(t)}{Dt} = \frac{D}{Dt}\iiint_{V(t)} \Phi\left(\vec{x},t\right) dV$$

Επειδή τα όρια του ολοκληρώματος εξαρτώνται από τον χρόνο, δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε την συνάρτηση *Φ*

Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $\vec{x} = \vec{x}\left(\vec{\xi},t\right)$

Και την σχέση: $dV = \zeta\, dV_0$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}\iiint_{V(t)} \Phi\left(\vec{x},t\right) dV = \frac{D}{Dt}\iiint_{V_0} \Phi\left(\vec{x},t\right) dV_0$$

Το dV_0 (αρχικό όγκος σωματιδίου) δεν εξαρτάται από τον χρόνο

Παραγωγίζοντας:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{V_0}\Phi\left(\vec{x},t\right)\zeta\, dV_0 = \iiint_{V_0}\left\{\frac{D\Phi}{Dt}\zeta + \Phi\frac{D\zeta}{Dt}\right\}dV_0$$

- Χρησιμοποιούμε την σχέση: $\frac{D\zeta}{Dt} = \zeta\, div\vec{U}$

$$\Rightarrow \iiint_{V_0}\left\{\frac{D\Phi}{Dt}\zeta + \Phi\frac{D\zeta}{Dt}\right\}dV_0 = \iiint_{V_0}\left\{\frac{D\Phi}{Dt}\zeta + \Phi\zeta\, div\vec{U}\right\}dV_0$$

Πραγματοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό και
και χρησιμοποιώντας την σχέση $\zeta dV_0 = dV$

$$\Rightarrow \iiint_{V_0}\left\{\frac{D\Phi}{Dt}\zeta + \Phi\zeta\, di\vec{v}\vec{U}\right\}dV_0 = \iiint_{V(t)}\left\{\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi div\vec{U}\right\}dV$$

Παίρνοντας υπόψη μας την σχέση μεταξύ ολικής και μερικής παραγώγου:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{U}\nabla\Phi$$

Συνεπάγεται:

$$\iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{U}\nabla\Phi + \Phi div\vec{U} \right\} dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla\Phi\vec{U} \right\} dV =$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}\iiint_{V(t)} \Phi\left(\vec{x},t\right) dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla\Phi\vec{U} \right\} dV =$$

Ορισμένες φορές είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε στην παραπάνω σχέση το θεώρημα του GREEN

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}\iiint_{V(t)} \Phi\left(\vec{x},t\right) dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \iint_{S(t)} \left(\Phi\vec{U}\right)\vec{n}\,dS$$

όπου $\vec{n}$ Το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε τυχόν σημείο της επιφάνειας

Εξίσωση της συνέχειας

- Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Reynolds για την περίπτωση που Φ αντιστοιχεί με την πυκνότητα ρ του ρευστού που εξετάζουμε.

Ορίζουμε την πυκνότητα ως: $\rho = \frac{dm}{dV}$

Όπου dm η μάζα περιέχεται στον όγκο dV

$$\Rightarrow m = \iiint_V \rho\left(\vec{x},t\right)dV$$

$$m = \iiint\limits_{V} \rho\left(\vec{x}, t\right) dV$$

Υποθέτω ότι ο όγκος V είναι σωματιδιακός (προσέγγιση Lagrange).

Κατά συνέπεια μπορώ να εφαρμόσω την αρχή της διατήρησης της μάζας (πρέπει να παραμείνει σταθερή)

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint\limits_{V(t)} \rho dV = 0$$

- Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Reynolds:

$$\frac{Dm}{Dt} = \iiint\limits_{V(t)} \left\{ \frac{D\rho}{Dt} + \rho div\vec{U} \right\} dV = 0$$

Επειδή το τριπλό ολοκλήρωμα πρέπει να μηδενίζεται για κάθε αυθαίρετο όγκο V(t), η παράσταση μέσα στο ολοκλήρωμα πρέπει να μηδενίζεται

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho div\vec{U} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho div\vec{U} = 0$$

- Η παραπάνω εξίσωση γράφεται και με τη μορφή:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{U} gra\vec{d}\,\rho + \rho div\vec{U} = 0$$

ή και

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{U}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{U}\right) = 0$$

Για την περίπτωση ομογενούς και ασυμπίεστου νερού:

$$div\left(\vec{U}\right) = 0$$

- Οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho w\right)}{\partial z} = 0$$

και

$$\frac{\partial\left(u\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(w\right)}{\partial z} = 0$$

Ροϊκή συνάρτηση

- Υποθέτουμε πως έχουμε ένα ασυμπίεστο ρευστό και επίπεδη κίνηση (w=0)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

- Αν βρούμε μία συνάρτηση Ψ με τις ιδιότητες

$$u\left(x,y,t\right)=\frac{\partial \psi\left(x,y,t\right)}{\partial y}$$

$$v(x,y,t)=-\frac{\partial \psi\left(x,y,t\right)}{\partial x}$$

Τότε η εξίσωση της συνέχειας ικανοποιείται αυτομάτως

- Πλεονέκτημα της εισαγωγής της συνάρτησης ροής είναι ότι μπορούμε να εργαστούμε με μία μόνο συνάρτηση (Ψ) , αντί δύο συναρτήσεων (u και v)

Υπολογισμός της ροϊκής συνάρτησης Ψ

- Ολοκληρώνουμε την (3.4.12) :

$$\psi\left(x,y,t\right)=\int u\left(x,y,t\right)dy+f\left(x,t\right)$$

Διαφορίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς x:

$$\frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial x}=F\left(x,y,t\right)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την (3.4.13)

$$F\left(x,y,t\right)=\frac{\partial f\left(x,y,t\right)}{\partial x}=\frac{\partial \psi\left(x,y,t\right)}{\partial x}-v\left(x,y,t\right)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την (3.4.13)

$$F\left(x,y,t\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int u\left(x,y,t\right)dy\right)-v(x,y,t)$$

Παίρνοντας υπόψη μας την (3.4.12) και την εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int u\,dy\right)-\frac{\partial v}{\partial y}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

- Και τελικά η (3.4.14) γίνεται :

$$\psi\left(x,y,t\right)=\int u\left(x,y,t\right)dy+\int F(x,t)dx+G(t)$$

•Οι δύο πρώτοι όροι της δεξιάς πλευράς της (3.4.18) είναι συναρτήσεις του πεδίου ταχυτήτων

•Η ακριβής γνώση του τρίτου όρου δεν είναι απαραίτητη

Στην πράξη συχνά σχεδιάζουμε τις καμπύλες για τις οποίες, *για μία δεδομένη χρονική στιγμή t_k*, **Ψ =σταθερά**

- Οι καμπύλες αυτές έχουν την ιδιότητα να είναι εφαπτόμενες στο πεδίο ταχυτήτων

Πράγματι αν:

$$\psi\left(x, y, t_k\right) = c \quad \Rightarrow d\psi = 0$$

Κατά συνέπεια:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

Κάνοντας χρήση του ορισμού της ροϊκής συνάρτησης, δηλ.:

$$u(x,y,t)=\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial y}$$

$$v(x,y,t)=-\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow d\psi=-vdx+udy=0$$

- Δηλαδή, για ασυμπίεστη ροή και για καμπύλες για τις οποίες ψ=σταθερό:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

Συνεπώς οι γραμμές ροής (για τις οποίες για τις οποίες ψ=σταθερό) έχουν την διεύθυνση της ταχύτητας για μία ορισμένη χρονική στιγμή.

ΤΡΟΧΙΕΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Για μία περιγραφή της ροής σύμφωνα με την προσέγγιση του Lagrange, εισάγουμε την έννοια των τροχιών σωματιδίων:

$$\frac{dx_i}{dt} = U_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$$

Με αρχικές συνθήκες:

$x_i = \xi_i$ για $t = 0$ $i = 1, 2, 3$

- Για μόνιμη ροή οι γραμμές ροής και οι τροχιές των σωματιδίων
- συμπίπτουν
- Σύμπτωση των γραμμών ροής και των τροχιών των σωματιδίων
- δεν σημαίνει μόνιμη ροή