ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

<u>**Χρήσεις της διαστατικής ανάλυσης**</u>

Η διαστατική ανάλυση είναι μία τεχνική που κάνει χρήση της μελέτης των διαστάσεων για τη λύση των προβλημάτων της Ρευστομηχανικής.

Οι εφαρμογές της διαστατικής ανάλυσης είναι:

-Ο έλεγχος της διαστατικής ομογένειας των εξισώσεων
-Διατύπωση των εξισώσεων της Μηχανικής Ρευστών με αδιάστατες παραμέτρους
-Σχεδιασμός των πειραμάτων και αξιολόγηση των πειραματικών αποτελεσμάτων
-Καλύτερη κατανόηση των φυσικών φαινομένων

- **<u>Θεμελιώδεις διαστάσεις</u>** Οι βασικές διαστάσεις που επιλέγουμε. Όλα τα μεγέθη , στην Μηχανική Ρευστών μπορούν να εκφραστούν βάσει των θεμελιωδών διαστάσεων που έχουμε επιλέξει.

Επιλέγουμε τις εξής βασικές διαστάσεις

- -Μήκος [L] (length)
- - Χρόνος [T] (time)
- -Μάζα [M] (mass)
- **<u>Εξαγόμενες διαστάσεις</u>**

Λοιπές διαστάσεις πλην των βασικών

Εμβαδόν=ΜήκοςxΠλάτος = $L^2 \cdot T^0 \cdot M^0$

Ταχύτητα=Απόσταση/χρόνος= $L^1 \cdot T^{-1} \cdot M^0$

Επιτάχυνση= Ταχύτητα/χρόνος= $L^1 \cdot T^{-2} \cdot M^0$

Πίεση=Δύναμη/Εμβαδόν= $= \frac{LT^{-2}M}{L^2} = L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M$

-**Αδιάστατοι αριθμοί (**Καθαροί αριθμοί). Είναι αριθμοί στους οποίους δεν προσαρτούνται μονάδες και δεν έχουν διαστάσεις. $L^0 \cdot T^0 \cdot M^0$

- **Διαστατοί αριθμοί** είναι αριθμοί που ακολοθούνται από μονάδες:

  π.χ. η ταχύτητα ροής στον αγωγό που εξετάζουμε είναι 5m/s

Αρχή της διαστατικής ομοιογένειας

- Η αρχή της διαστατικής ομοιογένειας δηλώνει ότι η εξίσωση που εκφράζει ένα φυσικό φαινόμενο είναι αλγεβρικά σωστή εάν τα θεμελιώδη μεγέθη είναι ισοδύναμα στα δύο μέρη της εξίσωσης .
- Οι διαστάσεις στα δύο μέρη μίας εξίσωσης μπορούν να εκφραστούν ως :

$$M^a L^b T^c = M^d L^e T^f$$

- Η εξίσωση θα είναι ομοιογενής εάν

  a=d

  b=e

  c=f

Παράδειγμα εφαρμογής

- Εξετάζουμε την απόσταση (χ) που διανύει ένα σώμα κινούμενο με την επιτάχυνση της βαρύτητας

$$\chi = \frac{1}{2} g t^2$$

- Αριστερό σκέλος της εξίσωσης $[x] = [L]$
- Δεξιό σκέλος της εξίσωσης

$$[1/2] = [M^0 L^0 T^0]$$

$$[g] = [L \cdot T^{-2}]$$

$$[t^2] = [T^2]$$

Κατά συνέπεια:
[αριστερό σκέλος]=[δεξιό μέλος] $= [L \cdot T^{-1}]$

Βασικές αρχές διαστατικής ανάλυσης

- Εξισώσεις σε αδιάστατη μορφή δίνουν μία καλύτερη εποπτεία των φαινομένων

- Η αδιαστατοποίηση γίνεται διαιρώντας μία εξίσωση με έναν από τους όρους της

Παράδειγμα

- Η εξίσωση της απόστασης χ που διανύει ένα σωματίδιο, με αρχική ταχύτητα v_0 υπό τη επίδραση της βαρύτητας γράφεται:

$$\chi = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{ή} \qquad \chi - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

Έχουμε μία συνάρτηση της μορφής: $F(\chi, v_0, g, t) = 0$

Η εξίσωση γράφεται σε αδιάστατη μορφή $\frac{\chi}{v_0 t} - 1 - \frac{1}{2}\frac{gt}{v_0} = 0$

η οποία είναι μια συνάρτηση της μορφής: $F(a, b) = 0$

όπου $a = \frac{\chi}{v_0 t}, \quad b = \frac{gt}{v_0}$

- Με την βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης μετατρέψαμε μία συνάρτηση 4 μεταβλητών σε μία συνάρτηση 2 μεταβλητών
- Το πλεονέκτημα της μετατροπής εντοπίζεται σε προβλήματα που δεν ξέρουμε την συναρτησιακή σχέση μεταξύ των μεταβλητών
- Υποθέτοντας ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τον νόμο του Νεύτωνα πειραματικά θα αρκούσε να σχεδιάζαμε τα πειραματικά αποτελέσματα σε άξονες των a και b
- Αντίθετα ο προσδιορισμός των σχέσεων 4 μεταβλητών είναι πολύ δύσκολος

Το θεώρημα των π
(Θεώρημα των Vaschy-Buckingham)

- Θεωρούμε ένα πρόβλημα που περιέχει *ζ* φυσικές ποσότητες $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\zeta$ (ταχύτητα, παροχή, ιξώδες, μήκος αγωγού κλπ.)
- Οι θεμελιώδεις διαστάσεις [M,L,T], που εμφανίζονται στις παραπάνω ποσότητες είναι *γ*
- **Τότε υπάρχουν $m=\zeta-\gamma$ αδιάστατοι αριθμοί (μονώνυμα) $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_\zeta$ τα οποία περιγράφουν πλήρως το πρόβλημα (θεώρημα των π)**

Αντί να αναζητήσουμε την συναρτησιακή σχέση

$$\Phi(q_1, q_2, \ldots, q_\zeta) = 0$$

Αναζητούμε την συναρτησιακή σχέση:

$$\Psi(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) = 0 \qquad m=\zeta-\gamma$$

Πρακτικοί κανόνες για την διαστατική ανάλυση

- (0) Δημιουργήστε μία λίστα των αδιάστατων παραμέτρων που αποτελούν μέρος του προβλήματος
- (1) Δημιουργήστε μία λίστα των ζ διαστατών παραμέτρων του προβλήματος $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\zeta$
- (2) Προσδιορίστε τις γ θεμελιώδεις διαστάσεις των φυσικών μεγεθών
- (3) Γράψτε την γενική έκφραση των π_i σαν γινόμενα των δυνάμεων των φυσικών αριθμών:

$$\pi_i = q_1^{j_1} \cdot q_2^{j_2} \cdot \ldots q_\zeta^{j_\zeta}$$

(οι εκθέτες j_i στο παραπάνω πρόβλημα είναι άγνωστες μεταβλητές οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν στην συνέχεια)

- (4) Αντικαταστείστε τα φυσικά μεγέθη με τις θεμελιώδεις διαστάσεις τους [M,L,T]
- (5) Γράψτε το σύστημα των *γ* αλγεβρικών εξισώσεων, εξισώνοντας το σύνολο των εκθετών κάθε θεμελιώδους διάστασης με το μηδέν.
- (6) Επιλέξτε τις m=ζ-γ κύριες ποσότητες με την ακόλουθη σειρά προτίμησης

  (i) ζητούμενη ποσότητα (το φυσικό μέγεθος που θέλουμε να προσδιορίσουμε)

  (ii) μ,g

  (iii) Πτώση πίεσης Δp, το μήκος L, παροχή Q

Δώστε την τιμή 1 στον δείκτη μίας από τις κύριες ποσότητες και 0 στους δείκτες των υπολοίπων. Βρείτε την λύση του συστήματος για κάθε συνδυασμό τιμών.

- Επαναλάβατε την διαδικασία θέτοντας την τιμή 1 στον δείκτη μίας άλλης βασικής ποσότητας (και μηδέν στις υπόλοιπες). *Κάντε κάθε φορά έλεγχο για το αν η εξίσωση είναι γραμμικά εξαρτημένη από μία από τις υπόλοιπες*
- Έχοντας υπολογίσει τους *m* συνδυασμούς των εκθετών, υπολογίστε τα *m* αδιάστατα μονώνυμα $\boldsymbol{\pi_i}$ που αντιστοιχούν στις *m* λύσεις (συνδυασμούς δεικτών).
- Όπου είναι δυνατόν μετατρέψτε τα αδιάστατα πολυώνυμα $\boldsymbol{\pi_i}$, σε έναν από τους κλασικούς αδιάστατους αριθμούς:

$\mathrm{Re} = \rho V l / \mu$ αριθμός Reynolds

$Fr = V^2 /(gl)$ αριθμός Froude

$C_F = F /(\rho V^2 l^2 / 2$ συντελεστής αντίστασης

- Αυτή η μετατροπή επιτυγχάνεται υψώνοντας τα μονώνυμα στην κατάλληλη δύναμη, ή διαιρώντας τα με τους κατάλληλους συντελεστές

Π.χ. Το μονώνυμο $\pi_k = \mu/(\rho VD)$

Μετατρέπεται στο μονώνυμο: $\pi_k' = (\rho VD)/\mu = \mathrm{Re}$

Γενικές οδηγίες

- Είναι σημαντικό να επιλέγονται οι κατάλληλες μεταβλητές (*Παράλειψη μεταβλητών οδηγεί σε ελλιπή κατανόηση ενός προβλήματος, επιλογή ακατάλληλων μεταβλητών δυσχεραίνει την επίλυση του)*
- Συνδυάστε μεταβλητές όταν αυτή η διαδικασία οδηγεί σε μεγέθη με φυσική σημασία. (*Σε πρόβλημα με διαφορά πυκνότητας ρευστών $\Delta\rho$, το μέγεθος $\Delta\rho g$ εκφράζει ανωστική δύναμη ανά μονάδα όγκου*)
- Όταν δεν είμαστε σίγουροι ότι ένα μέγεθος μπορεί να παραληφθεί, φροντίζουμε να εμφανίζεται σε έναν μόνο αδιάστατο αριθμό (*Μπορούμε έτσι να διαπιστώσουμε ότι αυτός ο αριθμός δεν επηρεάζει το φαινόμενο που μας ενδιαφέρει*) .

Εφαρμογή:
Υπολογισμός της δύναμης που ασκεί ροή σε στερεό αντικείμενο

- Θα εφαρμόσουμε την διαστατική ανάλυση για τον υπολογισμό της δύναμης που ασκεί ένα ρευστό σε ένα στερεό αντικείμενο:

- Βάθρο μίας γέφυρας, ένα πλοίο, κόκκος άμμου, αυτοκίνητο

Θεωρούμε ότι τα χαρακτηριστικά μεγέθη του προβλήματος είναι τα εξής :

- 1)Η δύναμη αντίστασης F (οπισθέλκουσα, συρτική δύναμη,drag)
- 2)Η χαρακτηριστική ταχύτητα ροής V
- 3) Το χαρακτηριστικό πλάτος του αντικειμένου l
- 4) Η πυκνότητα ρ
- 5) Το ιξώδες μ
- 6) Η επιτάχυνση της βαρύτητας g

Υποθέσαμε ότι το χαρακτηριστικό πλάτος του ρευστού B είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος του αντικειμένου $B>>l$

Θεωρήσαμε δηλαδή ότι το πρόβλημα μας περιγράφεται από την συναρτησιακή σχέση:

$$\Phi(F, V, l, \rho, \mu, g) = 0 \qquad (1)$$

Γνωρίζοντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την συναρτησιακή σχέση για την δύναμη F

$$F = G(V, l, \rho, \mu, g) \qquad (2)$$

Το πρόβλημα μας γράφεται σε αδιάστατη μορφή:

$$\pi_i = V^{j_1} l^{j_2} F^{j_3} \rho^{j_4} \mu^{j_5} g^{j_6} \qquad i=1,..,m \qquad (3)$$

Θεώρημα των *π*: *m=ζ-γ*

Έχουμε **ζ=6** (ζ ο αριθμός των μεγεθών του προβλήματος)

Οι διαστάσεις των μεγεθών είναι:

$$V = [LT^{-1}] \qquad l = [L] \qquad F = [MLT^{-2}]$$

$$\rho = [ML^{-3}] \qquad \mu = [ML^{-1}T^{-1}] \qquad g = [LT^{-2}] \qquad (4\alpha\text{-}\zeta)$$

Κατά συνέπεια *γ=3* και *m=6-3=3*

Αντικαθιστώ τις εξισώσεις (4α-ζ) στην (3)

$$[\pi_i] = [LT^{-1}]^{j_1}[L]^{j_2}[MLT^{-2}]^{j_3}[ML^{-3}]^{j_4}[ML^{-1}T^{-1}]^{j_5}[LT^{-2}]^{j_6}$$

ή $$[\pi_i] = [M^{j_3+j_4+j_5} \quad L^{j_1+j_2+j_3-3j_4-j_5+j_6} \quad T^{-j_1-2j_3-j_5-2j_6}] \quad (5α\text{-}γ)$$

Ο αριθμός π_i είναι αδιάστατος

Κατά συνέπεια:

$$[M] \rightarrow j_3 + j_4 + j_5 = 0 \qquad (6α)$$

$$[L] \rightarrow j_1 + j_2 + j_3 - 3j_4 - j_5 + j_6 = 0 \qquad (6β)$$

$$[T] \rightarrow -j_1 - 2j_3 - j_5 - 2j_6 = 0 \qquad (6γ)$$

Επιλέγω σαν κύρια μεγέθη:

- Την δύναμη F (**άγνωστη μεταβλητή)** Δείκτης j_3)
- Το ιξώδες μ (Δείκτης j_5)
- Την επιτάχυνση της βαρύτητας g (Δείκτης j_6)

1) Για τον υπολογισμό του π_1 θέτω $j_3=1, j_5=0, j_6=0$
2) Για τον υπολογισμό του π_2 θέτω $j_5=1, j_3=0, j_6=0$
3) Για τον υπολογισμό του π_3 θέτω $j_6=1, j_3=0, j_5=0$

Υπολογισμός του αδιάστατου μονωνύμου π1

- Θέτω στις (6α-γ) $j_3=1, j_5=0, j_6=0$
- Προκύπτει το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} j_4 &= -1 \\ j_1 + j_2 - 3j_4 &= -1 \\ j_1 &= -2 \end{aligned}$$

Το οποίο έχει σαν λύση: $j_1=-2, j_2=-2, j_4=-1$

Αντικαθιστώ τους εκθέτες στην (3), η οποία παίρνει τη μορφή:

$$\pi_1 = V^{j_1} l^{j_2} F^{j_3} \rho^{j_4} \mu^{j_5} g^{j_6} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 l^2}$$

Πολλαπλασιάζω το αδιάστατο μονώνυμο $\pi_1 = \dfrac{F}{\rho V^2 l^2}$

Με τον συντελεστή ***2***

$$\Rightarrow \pi_1' = 2\pi_1 = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 l^2} = C_D$$

Υπολογισμός του αδιάστατου μονωνύμου π_2

- Θέτω στις (6α-γ) $j_5=1, j_3=0, j_6=0$
- Προκύπτει το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} j_4 &= -1 \\ j_1 + j_2 - 3j_4 &= 1 \\ j_1 &= -1 \end{aligned}$$

Το οποίο έχει σαν λύση: $j_1=-1, j_2=-1, j_4=-1$

Αντικαθιστώ τους εκθέτες στην (3), η οποία έχει τη μορφή:

$$\pi_2 = V^{j_1} l^{j_2} F^{j_3} \rho^{j_4} \mu^{j_5} g^{j_6}$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{\mu}{\rho V l}$$

Υψώνω το μονώνυμο π2 εις την –1:

$$\Rightarrow \pi_2' = \frac{\rho V l}{\mu} = \mathrm{Re}$$

Υπολογισμός του αδιάστατου μονωνύμου π_3

- Θέτω στις (6α-γ) $j_6=1, j_3=0, j_5=0$
- Προκύπτει το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα:

$$
\begin{aligned}
j_4 &= 0 \\
j_1 + j_2 - 3j_4 &= -1 \\
j_1 &= -2
\end{aligned}
$$

Το οποίο έχει σαν λύση: $j_1=-2, j_2=1, j_4=0$

Αντικαθιστώ τους εκθέτες στην (3), η οποία έχει τη μορφή:

$$\pi_3 = V^{j_1} l^{j_2} F^{j_3} \rho^{j_4} \mu^{j_5} g^{j_6}$$

$$\Rightarrow \pi_3 = \frac{gl}{V^2}$$

Υψώνω το μονώνυμο π3 στην –1/2

$$\Rightarrow \pi_3' = \frac{V}{\sqrt{gl}} = Fr$$

Κατά συνέπεια οι τρεις αδιάστατοι αριθμοί που εκφράζουν το φαινόμενο είναι:

- 1) Ο συντελεστής αντίστασης (drag coefficient) C_D

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 l^2}$$

- 2) Ο αριθμός Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{Vl}{\mu / \rho} = \frac{Vl}{\nu}$$

- 3) Ο αριθμός Froude

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{gl}}$$

- Μπορούμε να βρούμε και άλλους αδιάστατους αριθμούς (π.χ. δίνοντας άλλους συνδυασμούς τιμών στους εκθέτες)

- Οι αριθμοί αυτοί μπορούν όμως να εκφραστούν συναρτήσει των τριών προηγουμένων και <u>δεν θα δίνουν περισσότερες πληροφορίες για το πρόβλημα</u>

Κατά συνέπεια σύμφωνα με το θεώρημα του π ισχύει η παρακάτω συναρτησιακή σχέση:

$\Phi(C_D,\mathrm{Re},\mathrm{Fr})=0$

Λύνοντας ως προς C_D:

$C_D=\Psi(\mathrm{Re},\mathrm{Fr})$.

Εάν γνωρίζουμε τα Re, Fr και την Ψ, υπολογίζουμε τον C_D

Παίρνοντας υπόψη μας ότι: $C_D = \dfrac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 l^2}$

$$\Rightarrow F = (\frac{1}{2}\rho V l^2)\Psi\left[\mathrm{Re}, Fr\right]$$

- Αναζητούμε μία συνάρτηση (την *Ψ*) δύο μεταβλητών *Re,Fr* και όχι των αρχικών πέντε (*V,l,ρ,μ* και *g*)
- **Με την διαστατική ανάλυση δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μορφή της συνάρτησης** *Ψ (Αυτό μπορεί να γίνει πειραματικά ή με αριθμητική ανάλυση)*
- Μας βοηθάει όμως στον **σχεδιασμό** των πειραματικών μοντέλων *(βάθρο γέφυρας, πλοίο..) :* Μπορεί να έχουν διαφορετικό μέγεθος και διαφορετικές ταχύτητες με το πραγματική κατασκευή και το πραγματικό φαινόμενο, πρέπει όμως να έχουν τους ίδιους αριθμούς *Re* και *Fr.*
- Οπότε σύμφωνα με την θεωρία της διαστατικής ανάλυσης πρέπει να έχουμε τον ίδιο αριθμό C_D για το μοντέλο και το φυσικό φαινόμενο που μελετάμε .
- Μπορούμε να προσδιορίσουμε την δύναμη στο βάθρο... χωρίς να να κατασκευάσουμε την γέφυρα...

Εφαρμογή της διαστατικής ανάλυσης στον υπολογισμό της πτώσης πίεσης σε έναν κλειστό αγωγό

- Θα εξετάσουμε την πτώση πίεσης για μόνιμη ροή υγρού σε έναν κλειστό κυλινδρικό αγωγό υπό πίεση (χωρίς ελεύθερη επιφάνεια υγρού).
- Θεωρούμε ότι η πτώση πίεσης εξαρτάται από
- α) Δp η πτώση πίεσης (η άγνωστη μεταβλητή)
- β) Το μήκος του αγωγού L
- γ) Η διάμετρος του αγωγού D
- δ) Η χαρακτηριστική ταχύτητα V
- ε) Η πυκνότητα ρ
- ζ) Το ιξώδες μ
- *η) Η τραχύτητα ε*

Το πρόβλημα μας γράφεται σε αδιάστατη μορφή:

$$\pi_i = \Delta p^{j_1} L^{j_2} D^{j_3} V^{j4} \rho^{j_5} \mu^{j_6} \varepsilon^{j_7} \quad i=1,..,m \qquad (7\alpha\text{-}?)$$

Θεώρημα των *π*: *m=ζ-γ*

Έχουμε **ζ=7** (ζ ο αριθμός των μεγεθών του προβλήματος)

Οι διαστάσεις των μεγεθών είναι:

$$\Delta p = [ML^{-1}T^{-2}] \quad L = [L] \quad D = [L] \quad V = [LT^{-1}]$$

$$\rho = [ML^{-3}] \quad \mu = [ML^{-1}T^{-1}] \quad \varepsilon = [L] \qquad (8\alpha\text{-}\zeta)$$

Κατά συνέπεια *γ=3* και *m=7-3=4*

Αντικαθιστώ τις εξισώσεις (8α-ζ) στην (7)

$$[\pi_i]=[(ML^{-1}T^{-2})^{j_1} L^{j_2} L^{j_3} (LT^{-1})^{j_4} (ML^{-3})^{j_5} (ML^{-1}T^{-1})^{j_6} L^{j_7}]$$

$$[\pi_i]=[M^{j_1+j_5+j_6} \quad L^{-j_1+j_2+j_3+j_4-3j_5-j_6+j_7} \quad T^{-2j_1-j_4-j_6}] \quad \text{(9α-δ)}$$

Ο αριθμός π_i είναι αδιάστατος

Κατά συνέπεια:

$$[M] \rightarrow j_1 + j_5 + j_6 = 0 \qquad \text{(10α)}$$

$$[L] \rightarrow -j_1 + j_2 + j_3 + j_4 - 3j_5 - j_6 + j_7 = 0 \qquad \text{(10β)}$$

$$[T] \rightarrow -2j_1 - j_4 - j_6 = 0 \qquad \text{(10γ)}$$

Επιλέγω σαν κύρια μεγέθη:

- Την διαφορά πίεσης Δp (**άγνωστη μεταβλητή)** Δείκτης j_1)
- Το ιξώδες μ (Δείκτης j_6)
- Το μήκος του αγωγού L (Δείκτης j_2)
- Την τραχύτητα του αγωγού ε (Δείκτης j_7)

1) Για τον υπολογισμό του π_1 θέτω $j_1=1$, $j_6=0$, $j_2=0$, $j_7=0$

2) Για τον υπολογισμό του π_2 θέτω $j_6=1$, $j_1=0$, $j_2=0$, $j_7=0$

3) Για τον υπολογισμό του π_3 θέτω $j_2=1$, $j_1=0$, $j_6=0$, $j_7=0$

4) Για τον υπολογισμό του π_4 θέτω $j_7=1$, $j_1=0$, $j_2=0$, $j_6=0$

Υπολογισμός του αδιάστατου μονωνύμου π_1

- Θέτω στις (10α-γ) $j_1=1, j_6=0, j_2=0, j_7=0$
- Προκύπτει το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} j_5 &= -1 \\ j_3 + j_4 - 3j_5 &= 1 \\ -j_4 &= 2 \end{aligned}$$

Το οποίο έχει σαν λύση: $j_3=-1, j_4=-2, j_5=-1$

Αντικαθιστώ τους εκθέτες στην (7α), η οποία παίρνει τη μορφή:

$$\pi_i = \Delta p^{j_1} L^{j_2} D^{j_3} V^{j4} \rho^{j_5} \mu^{j_6} \varepsilon^{j_7}$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

Πολλαπλασιάζω το αδιάστατο μονώνυμο $\pi_1 = \dfrac{\Delta p}{\rho V^2}$

Με τον συντελεστή ***2***

$$\Rightarrow \pi_1' = 2\pi_1 = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = C_{\Delta P}$$

Υπολογισμός του αδιάστατου μονωνύμου π2

- Θέτω στις (10α-γ) $j_6=1, j_1=0, j_2=0, j_7=0$
- Προκύπτει το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{array}{rrrl} & & j_5 & = -1 \\ j_3 & + j_4 & -3\,j_5 & = \;\;1 \\ & - j_4 & & = \;\;1 \end{array}$$

Το οποίο έχει σαν λύση: $j_3=-1, j_4=-1, j_5=-1$

Αντικαθιστώ τους εκθέτες στην (7β), η οποία έχει τη μορφή:

$$\pi_i = \Delta p^{j_1} L^{j_2} D^{j_3} V^{j4} \rho^{j_5} \mu^{j_6} \varepsilon^{j_7}$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{\mu}{\rho V l}$$

Υψώνω το μονώνυμο π2 εις την –1:

$$\Rightarrow \pi_2' = \frac{\rho V l}{\mu} = \mathrm{Re}$$

Υπολογισμός του αδιάστατου μονωνύμου π3

- Θέτω στις (10α-γ) $j_2=1, j_1=0, j_6=0, j_7=0$
- Προκύπτει το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} j_5 &= 0 \\ j_3 + j_4 - 3j_5 &= -1 \\ -j_4 &= 0 \end{aligned}$$

Το οποίο έχει σαν λύση: $j_3=-1, j_4=0, j_5=0$

Αντικαθιστώ τους εκθέτες στην (7γ), η οποία έχει τη μορφή:

$$\pi_3 = \Delta p^{j_1} L^{j_2} D^{j_3} V^{j4} \rho^{j_5} \mu^{j_6} \varepsilon^{j_7}$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{L}{D}$$

Κατά συνέπεια σύμφωνα με το θεώρημα του π ισχύει η παρακάτω συναρτησιακή σχέση:

$\Phi(C_{\Delta P}, Re, L/D, \varepsilon/D)=0$

Λύνοντας ως προς $C_{\Delta P}$:

$C_{\Delta P}=\Psi(Re, L/D, \varepsilon/D)$.

Εάν γνωρίζουμε τα Re, L/D,ε/D και την Ψ, υπολογίζουμε τον $C_{\Delta P}$

Παίρνοντας υπόψη μας ότι: $$C_{\Delta P} = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

$$\Rightarrow \Delta p = (\frac{1}{2}\rho V)\Psi\left[\mathrm{Re}, \frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}\right]$$

- Αναζητούμε μία συνάρτηση (την *Ψ*) τριών μεταβλητών *Re,Fr* και όχι των αρχικών πέντε (*V,l,ρ,μ* και *g*)
- **Με την διαστατική ανάλυση δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μορφή της συνάρτησης** *Ψ (Αυτό μπορεί να γίνει πειραματικά ή με αριθμητική ανάλυση)*
- Μας βοηθάει όμως στον **σχεδιασμό** των πειραματικών μοντέλων *(βάθρο γέφυρας, πλοίο..) :* Μπορεί να έχουν διαφορετικό μέγεθος και διαφορετικές ταχύτητες με το πραγματική κατασκευή και το πραγματικό φαινόμενο, πρέπει όμως να έχουν τους ίδιους αριθμούς *Re* και *Fr.*
- Οπότε σύμφωνα με την θεωρία της διαστατικής ανάλυσης πρέπει να έχουμε τον ίδιο αριθμό C_D για το μοντέλο και το φυσικό φαινόμενο που μελετάμε .
- Μπορούμε να προσδιορίσουμε την δύναμη στο βάθρο... χωρίς να να κατασκευάσουμε την γέφυρα...