ΕΜΒΟΛΙΜΗ ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μερικές βασικές έννοιες διανυσματικού λογισμού

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Ορισμοί

- Διάνυσμα ονομάζεται η μαθηματική οντότητα που έχει διεύθυνση, φορά και μέτρο.
- Βαθμωτό μέγεθος, είναι ένα μέγεθος που δεν έχει ούτε μέγεθος ούτε φορά .

- **2. Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων**

- Οι πράξεις μεταξύ των βαθμωτών μεγεθών είναι ταυτόσημες με τις κλασικές πράξεις της άλγεβρας (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση).
- Για να ορίσουμε πράξεις στις οποίες υπεισέρχονται διανύσματα, είναι χρήσιμο να παραστήσουμε το διάνυσμα με μία από τις παρακάτω ισοδύναμες μορφές, με την βοήθεια των μοναδιαίων διαστημάτων:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$$

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$$

Η πρόσθεση μεταξύ δύο διανυσμάτων ορίζεται σαν:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

όπου:

$$\vec{C} = (A_x + B_x)\vec{e}_x + (A_y + B_y)\vec{e}_y + (A_z + B_z)\vec{e}_z$$

και η αφαίρεση ανάλογα σε: $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$

ή αντίστοιχα

$$\vec{D} = (A_x - B_x)\vec{e}_x + (A_y - B_y)\vec{e}_y + (A_z - B_z)\vec{e}_z$$

$$\vec{D} = (A_x - B_x)\vec{e}_x + (A_y - B_y)\vec{e}_y + (A_z - B_z)\vec{e}_z$$

εάν $\vec{A} = \vec{B}$

Τότε το διάνυσμα $\vec{D}$

είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα (διάνυσμα του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι ίσες με το μηδέν.).

Κατά συνέπεια η διανυσματική εξίσωση

$$\vec{A} = \vec{B}$$

Ισούται με τρεις αλγεβρικές

Πρόσθεση μεταξύ ενός βαθμωτού μεγέθους και ενός διανύσματος δεν είναι δυνατή.

Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ ενός διανύσματος και ενός βαθμωτού μεγέθους ορίζεται σαν :

$$f\vec{A} = \vec{A}f = fA_x\vec{e}_x + fA_y\vec{e}_y + fA_z\vec{e}_z$$

Το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο μοναδιαίων διανυσμάτων ορίζεται σαν:

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1$ εάν i=j,

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ εάν $i \neq j$

Κατά συνέπεια $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Τελεστές

Ο τελεστής grad εφαρμόζεται επί ενός βαθμωτού μεγέθους και ορίζεται σαν:

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Ο τελεστής div εφαρμόζεται επί ενός διανύσματος και ορίζεται σαν:

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ο τελεστής Nabla ορίζεται σαν: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

Προφανώς ο τελεστής Nabla είναι διάνυσμα.

Ακολουθώντας τις συμβάσεις που είχαμε εισαγάγει:

$$\nabla f = gra\vec{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Κατά συνέπεια ο τελεστής Nabla αντιστοιχεί στην βαθμίδα ή στην απόκλιση ανάλογα με το αν ο Φ είναι βαθμωτό μέγεθος ή διάνυσμα.

Εισαγάγουμε τον τελεστή: $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi$

- Ακολουθώντας τις προηγούμενες συμβάσεις, βρίσκουμε ότι εάν ο τελεστής αυτός εφαρμοσθεί σε βαθμωτό μέγεθος ισούται με:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Laplace

εάν ο τελεστής αυτός εφαρμοσθεί σε διανυσματικό μέγεθος ισούται με:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{A} = (\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2})\vec{e}_x + (\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2})\vec{e}_y + (\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2})\vec{e}_z$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Stokes.

4. Θεώρημα του Gauss (Green)

- Το ολοκλήρωμα της απόκλισης ενός διανύσματος πάνω σε έναν τυχόντα όγκο ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου που περιέχει τον όγκο.

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot (d\vec{S})$$

Το θεώρημα του Gauss συνδέει το ολοκλήρωμα μίας παραγώγου με της τιμές της συνάρτησης στα όρια της περιοχής.

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να θεωρηθεί διαισθητικά σαν η τρισδιάστατη γενίκευση της γνωστής σχέσης:

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$$

ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗΣ ΓΡΑΦΗΣ EINSTEIN

Θεωρούμε ένα μονώνυμο, ορισμένοι από τους όρους του οποίου έχουν δείκτες. Οι δείκτες αυτοί μπορούν να πάρουν τιμές από 1έως n. (Στην πράξη n=2 ή n=3)

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α) Ο δείκτης εμφανίζεται δύο φορές: Τότε ο δείκτης αυτός καλείται άφωνος.

Β) Ο δείκτης εμφανίζεται μία φορά: Τότε ο δείκτης αυτός καλείται ελεύθερος.

Α) Σε ένα μονώνυμο υπάρχει ένας άφωνος δείκτης. (Δείκτης ο οποίος εμφανίζεται δύο φορές).

Τότε το μονώνυμο αντιστοιχεί με το άθροισμα όλων των μονωνύμων που σχηματίζονται $u_i v_i$ όταν ο δείκτης αυτός πάρει τιμές από 1 εως n. Στην περίπτωση αυτή το μονώνυμο ονομάζεται ψευδομονώνυμο.

Παράδειγμα:

Ανάπτυξη του μονωνύμου $u_i v_i$ (n=3)

$$u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Εάν σε ένα μονώνυμο υπάρχει ελεύθερος δείκτης, τότε δεν έχουμε άθροιση . Πρέπει όμως να γράψουμε n εξισώσεις στις οποίες ο δείκτης αυτός παίρνει διαδοχικά τις τιμές από 1 έως n

Παράδειγμα εφαρμογής:

Αναπτύξτε τον νόμο του Νταρσύ $q_i = -K\dfrac{\partial P}{\partial x_i} \qquad i = 1,2,3$

Η ανάπτυξη δίνει τρεις εξισώσεις:

$$q_1 = -K\frac{\partial P}{\partial x_1} \qquad q_2 = -K\frac{\partial P}{\partial x_2} \qquad q_3 = -K\frac{\partial P}{\partial x_3}$$

Πράγματι η εξίσωση Νταρσύ είναι μία διανυσματική εξίσωση, Και όπως είπαμε για τον τρισδιάστατο χώρο μπορεί να αναλυθεί Σε τρεις αλγεβρικές

Τανυστής δευτέρας τάξεως είναι η μαθηματική οντότητα η οποία όταν υφίσταται την πράξη του εσωτερικού πολλαπλασιασμού με διάνυσμα δίνει ένα διάνυσμα

$$a_i = A_{ij} b_i$$

Οι παρακάτω εκφράσεις είναι τανυστής ταχυτήτων παραμόρφωσης και παίζει βασικό ρόλο στην Μηχανική και την Μηχανική των Ρευστών

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Ο τανυστής δ_{ij} Ονομάζεται δέλτα του Kronecker

$\delta_{ij} = 1$ εάν $i=j$

$\delta_{ij} = 0$ εάν $i \neq j$

Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

- Η τάση $\mathbf{\Sigma_i}$ (διάνυσμα) εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας **δs.**
- Για μια γενικότερη διατύπωση των τάσεων εισάγουμε τον τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}}$
- Έχουμε την σχέση $\mathbf{\Sigma_i} = \mathbf{n_j}\, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}}$

- **nj** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στην επιφάνεια **δs**
- Ο δείκτης **i** δηλώνει την διεύθυνση της συνιστώσας της τάσεως
- Ο δείκτης **j** δηλώνει σε ποιον άξονα συντεταγμένων είναι κάθετη η στοιχειώδης επιφάνεια

Η ανάπτυξη μίας συνάρτησης σε σειρά Taylor σε μία διάσταση δίνεται από την σχέση:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) \quad + \dots$$

Για h απειροστά μικρό δηλ. h=dx μπορώ να παραλείψω τους όρους ανωτέρας τάξεως:

$$f(x+dx) \cong f(x) + dx \; f'(x)$$

επίσης

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y) + \left\{ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2 \right\}$$

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y) + \left\{ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2 \right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(x+dx, y+dy) \cong f(x,y) + \left\{ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \right.$$

Επεκτείνοντας τα παραπάνω σε ένα διανυσματικό μέγεθος

$$\Phi\left(\vec{z} + d\vec{z}\right) \cong \Phi\left(\vec{z}\right) + \frac{\partial \Phi\left(\vec{z}\right)}{\partial z_i} dz_i$$

Λαμβάνοντας τέλος υπόψη μας και τον χρόνο:

$$\Phi\left(\vec{z} + d\vec{z}, t\right) \cong \Phi\left(\vec{z}, t\right) + \frac{\partial \Phi\left(\vec{z}, t\right)}{\partial z_i} dz_i +$$

$$+ \frac{\partial \Phi\left(\vec{z}, t\right)}{\partial t} dt$$