ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ

ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΚΑΙ ΑΣΤΡΟΒΙΛΗ ΡΟΗ

•Αποδείξαμε ότι μία ροή είναι ασυμπίεστη όταν ισχύει η σχέση

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \qquad \text{όπου:}$$

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \quad \text{ή} \quad div\,\vec{u} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

- Μία ροή αποκαλείται αστρόβιλη, όταν ισχύει η σχέση

$$ro\vec{t}\,\vec{u} = 0$$

όπου
$$ro\vec{t}\,\vec{U} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3$$

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης δεν αποτελεί αντικείμενο της εξέτασης

Ποιές από τις παρακάτω ροές είναι ασυμπίεστες και ποιες αστρόβιλες; (Οι μαθηματικές εκφράσεις είναι αδιάστατες)

- A) $U_x = x + y$, $U_y = x - y$, $U_z = 0$

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 1 - 1 + 0 = 0$$

Για να είναι το διάνυσμα $rot\,\vec{u}$ ίσο με το μηδέν πρέπει

η κάθε συνιστώσα του να είναι ίση με το μηδέν

$$\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \qquad \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_y}{\partial x} = 0 - 0 = 0 \qquad \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} = 1 - 1 = 0$$

- B) $U_x = x + 2y \quad U_y = x^2 - y^2 \quad U_z = 0$

•Υπολογισμός του τελεστή div

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 1 - 2y + 0 \neq 0$$

Η ροή είναι μη ασυμπίεστη

•Ο υπολογισμός του $ro\,\vec{t}\,\vec{u}$ δίνεται παρακάτω

$$\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_y}{\partial x} = 0 - 2x = -2x \neq 0 \quad \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} = 2x - 1 \neq 0$$

Η ροή είναι μη αστρόβιλη

- Γ) $U_x = xt^2$ $U_y = xyt + y^2$ $U_z = 0$

•Υπολογισμός του τελεστή div

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = t^2 + (xt + 2y) + 0 \neq 0$$

Η ροή είναι μη ασυμπίεστη

•Ο υπολογισμός του $ro\,\vec{t}\,\vec{u}$ δίνεται παρακάτω

$$\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_y}{\partial x} = 0 - 2x = -2x \neq 0$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} = 2x - 1 \neq 0$$

Η ροή είναι μη αστρόβιλη

Εξετάζουμε το πεδίο ταχυτήτων της ροής που εξετάζουμε δίνεται από τις σχέσεις:

$$U_1 = \xi_1 e^t \qquad U_2 = -\xi_2 e^t \qquad U_3 = 0$$

Να βρεθούν:

- Οι τροχιές των σωματιδίων
- Οι γραμμές ροής

Είναι η παραπάνω ροή μόνιμη ή μη μόνιμη;

Λύση

Προφανώς η ροή είναι δισδιάστατη $(U_3 = 0)$

Οι μαθηματικές εξισώσεις για τις τροχιές (θέσεις των σωματιδίων στον χρόνο) είναι οι εξής:

$$U_1 = \frac{dx_1(\xi_{1,} t)}{dt} = \xi_1 e^t \Rightarrow dx_1 = \xi_1 e^t dt \qquad U_2 = \frac{dx_2(\xi_{2,} t)}{dt} = \xi_2 e^{-t} \Rightarrow dx_2 = -\xi_2 e^{-t} dt$$

$$dx_1 = \xi_1 e^t dt \qquad dx_2 = -\xi_2 e^{-t} dt$$

Γνωρίζω ότι ένα σωματίδιο ήταν το χρονικό σημείο t’=0 στην θέση ξ_1, ξ_2 θα είναι στο χρονικό σημείο t’=t στην θέση x_1, x_2. Κατά συνέπεια:

$$\int_{\xi_1}^{x_1} dx_1' = \xi_1 \int_0^t e^{t} dt' \Rightarrow x_1 - \xi_1 = \xi_1 e^t - \xi_1 \qquad \Rightarrow x_1 = \xi_1 e^t{}_1$$

$$\int_{\xi_2}^{x_2} dx_2' = -\xi_2 \int_0^t e^{-t'} dt' \Rightarrow x_2 - \xi_2 = \xi_2 e^{-t} - \xi_2 \quad \Rightarrow x_2 = \xi_2 e^{-t}$$

- Απαλοίφοντας τον χρόνο

$$\Rightarrow x_1 x_2 = \xi_1 e^t \xi_2 e^{-t} = \xi_1 \xi_2 = c \quad = \text{σταθερά}$$

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει μία υπερβολή

$$U_1 = \xi_1 e^t \qquad U_2 = -\xi_2 e^t \qquad U_3 = 0$$

Οι μαθηματικές εξισώσεις για τις γραμμές ροής είναι οι εξής:

$$\frac{dx_1}{U_1} = \frac{dx_2}{U_2} \quad \Rightarrow \frac{dx_1}{\xi_1 e^t} = \frac{dx_2}{-\xi_2 e^t} \quad \text{όμως} \quad x_1 = \xi_1 e^t \quad x_2 = \xi_2 e^{-t}$$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-x_2} \quad \Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} = -\int \frac{dx_2}{x_2} \quad \Rightarrow \ln x_1 = -\ln x_2 + c_1$$

$$\Rightarrow \ln x_1 + \ln x_2 = \ln c \quad \Rightarrow \ln(x_1 x_2) = \ln c$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = c$$

όπου c είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης

- Για μία συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς έχω την εξίσωση μίας γραμμή ροής
- Η σταθερά είναι ελεύθερη παράμετρος και η παραπάνω εξίσωση περιγράφει μία οικογένεια από εξισώσεις (στην συγκεκριμένη περίπτωση υπερβολές)

•Οι γραμμές ροής και οι τροχιές των σωματιδίων περιγράφονται με μαθηματικές εξισώσεις του ίδιου τύπου (υπερβολές)

Κατά συνέπεια ενδεχομένως η ροή να είναι μόνιμη

Ξέρω ότι:

$$U_1 = \xi_1 e^t \qquad U_2 = -\xi_2 e^t \qquad U_3 = 0$$

$$x_1 = \xi_1 e^t \qquad x_2 = \xi_2 e^{-t}$$

- Εκφράζοντας το πεδίο ταχυτήτων σε χωρικές συντεταγμένες (Euler) :

$$U_1 = x_1 \qquad U_2 = -x_2 \qquad U_3 = 0$$

Το πεδίο ταχυτήτων είναι ανεξάρτητο από τον χρόνο. Κατά συνέπεια η ροή είναι μόνιμη.

Εξετάζουμε το πεδίο ταχυτήτων της ροής που δίνεται από τις σχέσεις:

$$U_1 = 1 \qquad U_2 = 2t \qquad U_3 = 0$$

Να βρεθούν:

- Οι τροχιές των σωματιδίων
- Οι γραμμές ροής

Είναι η παραπάνω ροή μόνιμη ή μη μόνιμη;

Λύση

Προφανώς η ροή είναι δισδιάστατη $(U_3 = 0)$

Οι μαθηματικές εξισώσεις για τις τροχιές (θέσεις των σωματιδίων στον χρόνο) είναι οι εξής:

$$U_1 = \frac{dx_1}{dt} = 1 \quad \Rightarrow dx_1 = dt \qquad U_2 = \frac{dx_2}{dt} = 2t \quad \Rightarrow dx_2 = 2t\,dt$$

$$dx_1 = dt \qquad\qquad dx_2 = 2t\,dt$$

Γνωρίζω ότι ένα σωματίδιο ήταν το χρονικό σημείο t'=0 στην θέση ξ_1, ξ_2 θα είναι στο χρονικό σημείο t'=t στην θέση x_1, x_2. Κατά συνέπεια:

$$\int_{\xi_1}^{x_1} dx_1' = \int_0^t dt' \qquad \Rightarrow x_1 - \xi_1 = t$$

$$\int_{\xi_2}^{x_2} dx_2' = \int_0^t 2t'dt' \quad \Rightarrow x_2 - \xi_2 = t^2$$

- Απαλοίφοντας τον χρόνο

$$\Rightarrow x_2 = (x_1 - \xi_1)^2 + \xi_2$$

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει μία παραβολή

(Είναι της γενικής μορφής: $y = ax^2 + bx + c$)

$$U_1 = 1 \qquad U_2 = 2t \qquad U_3 = 0$$

Οι μαθηματικές εξισώσεις για τις γραμμές ροής είναι οι εξής:

$$\frac{dx_1}{U_1} = \frac{dx_2}{U_2} \qquad \Rightarrow \frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{2t} \qquad \Rightarrow 2t dx_1 = dx_2$$

$$x_2 = 2t x_1 + c$$

όπου c είναι σταθερά ολοκλήρωσης

•Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει τη ροή για ένα δεδομένο χρονικό σημείο t

•Για μία τιμή της σταθεράς έχω την εξίσωση μίας γραμμή ροής

Η σταθερά είναι ελεύθερη παράμετρος και η παραπάνω εξίσωση περιγράφει μία οικογένεια από εξισώσεις (στην συγκεκριμένη περίπτωση ευθείες παράλληλες μεταξύ τους)

Επειδή η μαθηματική εξίσωση των τροχιών είναι παραβολή και η εξίσωση των γραμμών ροής είναι ευθεία, η ροή είναι μη μόνιμη.

Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων:

$$u = U_0 t \qquad v = x$$

Όπου U_0 σταθερά.

Να βρεθούν οι γραμμές ροής.

Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων:

$$u = U_0 t \qquad v = x$$

Όπου U_0 σταθερά.

Να βρεθούν οι γραμμές ροής.

Λύση

Το πεδίο ταχυτήτων ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (U_0 t)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

Επίσης: $$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 t$$

$$u = U_0 t \qquad v = x$$

Ολοκληρώνω ως προς y:

$$\psi(x, y, t) = U_0 t y + f(x, t)$$

Ξέρω ότι: $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$

Οπότε παραγωγίζοντας έχω:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = -v = -x \qquad \Rightarrow f(x,t) = -\frac{x^2}{2} + G(t)$$

$$\Rightarrow \psi(x, y, t) = U_0 t y - \frac{x^2}{2} + G(t)$$

Επιλέγοντας αυθαίρετα ψ=0 για x=0 y=0 συνεπάγεται:
G(t)=0

$$\Rightarrow \psi(x, y, t) = U_0 t y - \frac{x^2}{2}$$

Οι εξισώσεις των γραμμών ροής είναι παραβολές