1. ΜΕΡΙΚΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

1.Εξισώσεις Navier-Stokes για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho f_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho f_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho f_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

u, v, w είναι η συνιστώσες της ταχύτητας κατά τις διευθύνσεις x, y, z αντίστοιχα. P είναι το πεδίο πίεσης, ρ είναι η πυκνότητα, μ είναι το δυναμικό ιξώδες, t είναι ο χρόνος. $\vec{f}$ είναι το πεδίο των εξωτερικών δυνάμεων.

2. Εξίσωση συνέχειας-διατήρησης της μάζας

Η εξίσωση της συνέχειας μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί με διανυσματική μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\vec{u})=0$$

Χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις Einstein:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}=0$$

Για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής (σταθερή πυκνότητα):

$$\frac{\partial(u)}{\partial x}+\frac{\partial(v)}{\partial y}+\frac{\partial(w)}{\partial z}=0$$

3.Ροϊκή συνάρτηση Ψ

Για την περίπτωση δισδτάστατης ασυμπίεστης ροής ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$u = \frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial y}\ ,\ v = -\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial x}$$

`u,v` όπου είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τις διευθύνσεις `x,y` αντίστοιχα, Ψ είναι η ροϊκή συνάρτηση ή οι γραμμές ροής.

4.Σχέσεις μεταξύ μερικής και ολικής παραγώγου

Έστω Φ ένα μέγεθος το οποίο μπορεί να είναι βαθμωτό η διανυσματικό.

$\frac{D\Phi}{Dt}$ είναι η ολική παράγωγος (περιγραφή κατα Lagrange) $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ είναι η μερική παράγωγος (περιγραφή κατά Euler). Η σχέση μεταξύ τους δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{U}\nabla\Phi$$

Όπου t είναι ο χρόνος και $\vec{U}$ είναι το πεδίο ταχύτητας

5.Θεώρημα μεταφοράς Reynolds

Το θεώρημα μεταφορά `Reynolds` μπορεί να εκφραστεί με μία από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{V(t)} \Phi(\vec{x},t)dV = \iiint_{V(t)} \left\{\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi\nabla\left[\vec{U}\right]\right\}dV$$

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{V(t)} \Phi(\vec{x},t)dV = \iiint_{V(t)} \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\left[\Phi\vec{U}\right]\right\}dV$$

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{V(t)} \Phi(\vec{x},t)dV = \iiint_{V(t)} \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\}dV + \iint_{S(t)}\left(\Phi\vec{U}\right)\vec{n}dS$$

όπου ∇ είναι ο τελεστής Nabla, $V(t)$ είναι ο όγκος ενός στοιχειώδους σωματιδίου, $S(t)$ είναι η επιφάνεια του στιχειώδους σωμτιδίου. $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε μία επιφάνεια

6.Τελεστές

6.1 Βασικές εννοιες διανυσματικής ανάλυσης

Σαν $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ή $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) είναι τα μοναδιαία διανύσματα ,παράλληλα στους άξονες x, y, z, με την αρχή τους τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων. (*Μοναδιαίο διάνυσμα ονομάζεται το διάνυσμα με μέτρο ίσο με τη μονάδα).*

Τα βαθμωτά μεγέθη A_x, A_y, A_z είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων κατά τις διευθύνσεις x, y, z (x_1, y_1, z_1) .

6.2 Ορισμός τελεστών

Ο τελεστής $gr\vec{ad}$ (βαθμίδα) εφαρμόζεται επί ενός βαθμωτού μεγέθους και ορίζεται σαν:

$$gr\vec{ad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Ο τελεστής div (απόκλιση) εφαρμόζεται επί ενός διανυσματικού μεγέθους και ορίζεται σαν:

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ο τελεστής Nabla ορίζεται σαν: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

Προφανώς ο τελεστής Nabla είναι διάνυσμα.

Ακολουθώντας τις συμβάσεις που είχαμε εισαγάγει:

$$\nabla f = gr\vec{ad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Κατά συνέπεια ο τελεστής $\nabla\Phi$ αντιστοιχεί στην βαθμίδα ή στην απόκλιση ανάλογα με το αν ο Φ είναι βαθμωτό μέγεθος ή διάνυσμα.

Ο τελεστής $\nabla^2\Phi$ ορίζεται σαν $\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi$
Ακολουθώντας τις προηγούμενες συμβάσεις, βρίσκουμε ότι εάν ο τελεστής αυτός εφαρμοσθεί σε βαθμωτό μέγεθος ισούται με:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Laplace.

Όταν ο τελεστής ∇^2 εφαρμόζεται σε ένα διάνυσμα ισούται με:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{A} = (\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2})\vec{e}_x + (\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2})\vec{e}_y + (\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2})\vec{e}_z$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Stokes.

Έστω f ένα βαθμωτό μέγεθος και $\vec{A}$ ένα διάνυσμα.,τότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\nabla\left(f\vec{A}\right) = f\nabla\vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f$$

7. Ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

8. Ειδικές συναρτήσεις

Συνάρτηση λάθους

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\omega^2} d\omega$$

Συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

9. Υπολογισμός παροχής

Η παροχή σε ορθογωνική διατομή για πεδίο ταχύτητας το οποίο δεν μεταβάλεται κατά την διεύθυνση z δίνεται από την σχέση

$$Q = B\int_0^H v dy$$

όπου B το πλάτος και H το ύψος της διατομής.