ΜΕΡΙΚΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Βαθμωτά μεγέθη και διανύσματα

Διάνυσμα ονομάζεται η μαθηματική οντότητα που έχει διεύθυνση, φορά και μέτρο.

Βαθμωτό μέγεθος, είναι ένα μέγεθος που δεν έχει ούτε μέγεθος ούτε φορά .

2. Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων

Οι πράξεις μεταξύ των βαθμωτών μεγεθών είναι ταυτόσημες με τις κλασικές πράξεις της άλγεβρας (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση).

Για να ορίσουμε πράξεις στις οποίες υπεισέρχονται διανύσματα, είναι χρήσιμο να παραστήσουμε το διάνυσμα $\vec{A}$ με μία από τις παρακάτω ισοδύναμες μορφές:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\,,\ \vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z\,,\ \vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$$

όπου x, y, z (x_1, y_1, z_1) είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ή $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) είναι τα μοναδιαία διανύσματα ,παράλληλα στους άξονες x, y, z, με την αρχή τους τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων. (*Μοναδιαίο διάνυσμα ονομάζεται το διάνυσμα με μέτρο ίσο με τη μονάδα).*

Τα βαθμωτά μεγέθη A_x, A_y, A_z είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων κατά τις διευθύνσεις x, y, z (x_1, y_1, z_1) .

Πρόσθεση μεταξύ ενός βαθμωτού μεγέθους και ενός διανύσματος δεν είναι δυνατή.

Η πρόσθεση μεταξύ δύο διανυσμάτων ορίζεται σαν:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

όπου:

$$\vec{C} = (A_x + B_x)\vec{e}_x + (A_y + B_y)\vec{e}_y + (A_z + B_z)\vec{e}_z$$

και η αφαίρεση ανάλογα σε:

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

ή αντίστοιχα

$$\vec{D} = (A_x - B_x)\vec{e}_x + (A_y - B_y)\vec{e}_y + (A_z - B_z)\vec{e}_z$$

Αν $\vec{A} = \vec{B}$ τότε το διάνυσμα $\vec{D}$ είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα (διάνυσμα του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι ίσες με το μηδέν.)

Η διανυσματική εξίσωση $\vec{A} = \vec{B}$ είναι ισοδύναμη με τρεις αλγεβρικές:

Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ ενός διανύσματος και ενός βαθμωτού μεγέθους ορίζεται σαν :

$$f\vec{A} = \vec{A}f = fA_x\vec{e}_x + fA_y\vec{e}_y + fA_z\vec{e}_z$$

Το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο μοναδιαίων διανυσμάτων ορίζεται σαν:

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1$ εάν i=j, $\quad\quad$ $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ εάν $i \neq j$

Κατά συνέπεια $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

3. **Τελεστές**

Ο τελεστής $gra\vec{d}$ (βαθμίδα) εφαρμόζεται επί ενός βαθμωτού μεγέθους και ορίζεται σαν:

$$gra\vec{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Ο τελεστής div (απόκλιση) εφαρμόζεται επί ενός διανυσματικού μεγέθους και ορίζεται σαν:

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ο τελεστής Nabla ορίζεται σαν: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

Προφανώς ο τελεστής Nabla είναι διάνυσμα.

Ακολουθώντας τις συμβάσεις που είχαμε εισαγάγει:

$$\nabla f = gra\vec{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Κατά συνέπεια ο τελεστής $\nabla\Phi$ αντιστοιχεί στην βαθμίδα ή στην απόκλιση ανάλογα με το αν ο Φ είναι βαθμωτό μέγεθος ή διάνυσμα.

Ο τελεστής $\nabla^2\Phi$ ορίζεται σαν $\nabla^2\Phi = \nabla\cdot\nabla\Phi$

Ακολουθώντας τις προηγούμενες συμβάσεις, βρίσκουμε ότι εάν ο τελεστής αυτός εφαρμοσθεί σε βαθμωτό μέγεθος ισούται με:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Laplace.

Όταν ο τελεστής $\nabla^2\Phi$ εφαρμόζεται σε ένα διάνυσμα ισούται με:

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla\cdot\nabla\cdot\vec{A} = (\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2})\vec{e}_x + (\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2})\vec{e}_y + (\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2})\vec{e}_z$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Stokes.

4. Θεώρημα του Gauss (Green)

Το ολοκλήρωμα της απόκλισης ενός διανύσματος πάνω σε έναν τυχόντα όγκο ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου που περιέχει τον όγκο.

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}dV = \iint_S \vec{A}\cdot(d\vec{S})$$

όπου $d\vec{S} = \vec{n}dS$, $\vec{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε ένα στοιχείο επιφάνειας με μέτρο dS.

Το θεώρημα του Gauss συνδέει το ολοκλήρωμα μίας παραγώγου με της τιμές της συνάρτησης στα όρια της περιοχής.

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να θεωρηθεί σαν η τρισδιάστατη γενίκευση της γνωστής σχέσης:

$$\int_a^b \frac{df}{dx}dx = f(b) - f(a)$$