

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ Δ.Π.Θ.

**ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ**  
ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2008-2009

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΜΟΥΤΣΟΠΟΥΛΟΣ  
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

## 1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

### 1.1.1. Εξισώσεις Navier-Stokes για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$u, v, w$  είναι η συνιστώσες της ταχύτητας κατά τις διευθύνσεις  $x, y, z$  αντίστοιχα.  $P$  είναι το πεδίο πίεσης,  $\rho$  είναι η πυκνότητα,  $\mu$  είναι το δυναμικό ιξώδες,  $t$  είναι ο χρόνος.  $\vec{f}$  είναι το πεδίο των εξωτερικών δυνάμεων.

### 1.1.2 Εξίσωση συνέχειας-διατήρησης της μάζας

Η εξίσωση της συνέχειας μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας με διανυσματική μορφή :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

Χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις Einstein :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

Για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής (σταθερή πυκνότητα):

$$\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} + \frac{\partial(w)}{\partial z} = 0$$

### **1.1.3.Ροϊκή συνάρτηση Ψ**

Για την περίπτωση δισδιάστατης ασυμπίεστης ροής ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$u = \frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial x}$$

u, v όπου είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τις διευθύνσεις x, y αντίστοιχα, Ψ είναι η ροϊκή συνάρτηση ή οι γραμμές ροής.

### **1.1.4.Σχέσεις μεταξύ μερικής και ολικής παραγώγου**

Έστω Φ ένα μέγεθος το οποίο μπορεί να είναι βαθμωτό η διανυσματικό.

$\frac{D\Phi}{Dt}$  είναι η ολική παράγωγος (περιγραφή κατά Lagrange)  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  είναι η μερική παράγωγος (περιγραφή κατά Euler). Η σχέση μεταξύ τους δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{U}\nabla\Phi$$

Όπου t είναι ο χρόνος και  $\vec{U}$  είναι το πεδίο ταχύτητας

### **1.1.5.Θεώρημα μεταφοράς Reynolds**

Το θεώρημα μεταφοράς Reynolds μπορεί να εκφραστεί με μία από τις παρακάτω εκφράσεις :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \Phi(\vec{x},t) dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \nabla[\vec{U}] \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \Phi(\vec{x},t) dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla[\Phi\vec{U}] \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \Phi(\vec{x},t) dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right\} dV + \iint_{S(t)} (\Phi\vec{U}) \cdot \vec{n} dS$$

όπου  $\nabla$  είναι ο τελεστής Nabla,  $V(t)$  είναι ο όγκος ενός στοιχειώδους σωματιδίου,  $S(t)$  είναι η επιφάνεια του στοιχειώδους σωματιδίου.  $\vec{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε μία επιφάνεια

### 1.1.6.Χρήση Τελεστών στη Ρευστομηχανική

#### 1.1.6.1 Βασικές εννοιες διανυσματικής ανάλυσης

Σαν  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  ( $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ή  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) είναι τα μοναδιαία διανύσματα ,παράλληλα στους άξονες  $x, y, z$ , με την αρχή τους τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων. (Μοναδιαίο διάνυσμα ονομάζεται το διάνυσμα με μέτρο ίσο με τη μονάδα).

Τα βαθμωτά μεγέθη  $A_x, A_y, A_z$  είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων κατά τις διευθύνσεις  $x, y, z$  ( $x_1, y_1, z_1$ ).

#### 1.1.6.2 Ορισμός τελεστών

Ο τελεστής  $grad$  (βαθμίδα) εφαρμόζεται επί ενός βαθμωτού μεγέθους και ορίζεται σαν:

$$grad \vec{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Ο τελεστής  $div$  (απόκλιση) εφαρμόζεται επί ενός διανυσματικού μεγέθους και ορίζεται σαν:

$$div \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ο τελεστής Nabla ορίζεται σαν:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$

Προφανώς ο τελεστής Nabla είναι διάνυσμα.

Ακολουθώντας τις συμβάσεις που είχαμε εισαγάγει:

$$\nabla f = grad \vec{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = div \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Κατά συνέπεια ο τελεστής  $\nabla \Phi$  αντιστοιχεί στην βαθμίδα ή στην απόκλιση ανάλογα με το αν ο  $\Phi$  είναι βαθμωτό μέγεθος ή διάνυσμα.

Ο τελεστής  $\nabla^2 \Phi$  ορίζεται σαν  $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi$

Ακολουθώντας τις προηγούμενες συμβάσεις, βρίσκουμε ότι εάν ο τελεστής αυτός εφαρμοσθεί σε βαθμωτό μέγεθος ισούται με:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Laplace.

Όταν ο τελεστής  $\nabla^2 \vec{\Phi}$  εφαρμόζεται σε ένα διάνυσμα ισούται με:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{A} = \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z$$

Ο παραπάνω τελεστής ονομάζεται και τελεστής Stokes.

## **7. Ορισμένα ολοκληρώματα**

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

## **8. Ειδικές συναρτήσεις**

Συνάρτηση λάθους

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-\omega^2} d\omega \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n}$$

## 1.2 ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ

### NAVIER-STOKES

#### 1.2.1 ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΔΥΟ ΑΚΙΝΗΤΕΣ ΠΛΑΚΕΣ

Εξετάζουμε μία μόνιμη ασυμπίεστη ροή ενός νευτώνειου ρευστού μεταξύ δύο επίπεδων παράλληλων πλακών, οι οποίες είναι ακίνητες. Η απόσταση μεταξύ των πλακών ορίζεται σαν  $h$ . Ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες.
- Οι εξωτερικές δυνάμεις  $\vec{f}$  θεωρούνται αμελητέες.
- Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ . Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  ( $v$  και  $w$ ) είναι μηδενικές.
- Η πίεση και στα δύο άκρα της πλάκας θεωρείται γνωστή.
- Το πλάτος της πλάκας κατά την διεύθυνση  $z$  είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το ύψος  $h$ . Κατά συνέπεια οι μεταβολές κατά την διεύθυνση  $z$  θεωρούνται αμελητέες

#### Ερωτήσεις

**4α)** Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή  $u$  (συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση  $x$ ):

4αα) Για  $y=0$  (στο σημείο επαφής του ρευστού με την κάτω πλάκα)

4αβ) Για  $y=h$  (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πάνω πλάκα)

**4β)** Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

**4γ)** Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

4γα)-Η πίεση  $p$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ .

4γβ)-Η πίεση  $p$  είναι συνάρτηση μόνο του  $y$ .

4γγ)-Η συνιστώσα της ταχύτητας  $u$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ .

4γδ)- Η συνιστώσα της ταχύτητας  $u$  είναι συνάρτηση μόνο του  $y$ .

Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας παίρνοντας υπόψη σας την απάντησή σας στην ερώτηση 4β)

**4δ)** Υπολογίστε την συνάρτηση η οποία περιγράφει την συνιστώσα της ταχύτητας  $u$ .

**4ε)** Υπολογίστε την παροχή η οποία διέρχεται από μία δεδομένη διατομή κάθετα στις δύο πλάκες

**4ζ)** Περιγράψτε ένα πρακτικό πρόβλημα το οποίο να σχετίζεται με διαχείριση υδατικών πόρων /μεταφορά ρύπων και το οποίο αντιστοιχεί στην παραπάνω ροή.

## 1.2.2 ΕΡΠΟΥΣΑ ΡΟΗ ΠΡΟΚΑΛΟΥΜΕΝΗ ΑΠΟ ΚΙΝΗΣΗ ΡΕΥΣΤΟΥ ΣΕ ΗΜΙΑΠΕΙΡΟ ΜΕΣΟ

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία άπειρη επίπεδη πλάκα εμβαπτισμένη σ' έναν άπειρο χώρο ρευστού.

Αρχικά η πλάκα και το ρευστό είναι ακίνητα.

Στο χρονικό σημείο  $t=0$  η πλάκα αρχίζει και κινείται με σταθερή ταχύτητα  $U$  πάνω στο επίπεδο της. Λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης το ρευστό αρχίζει να κινείται.

Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες. Η ροή είναι ασυμπίεστη.

Οι εξωτερικές δυνάμεις  $\vec{f}$  θεωρούνται αμελητέες.

Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ . Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  ( $v$  και  $w$ ) είναι μηδενικές.

Το πεδίο της πίεσης μπορεί να θεωρηθεί παντού σταθερό και όλες οι παράγωγοι της πίεσης ίσες με το μηδέν.

Λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος οι μεταβολές κατά την διεύθυνση  $z$  θεωρούνται μηδενικές.

### Ερωτήσεις

α) Γράψτε τις αρχικές συνθήκες για τη μεταβλητή  $u$  (συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση  $x$ ).

β) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή  $u$  για  $y=0$  (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πλάκα). Δεδομένου ότι το πεδίο ροής μπορεί να θεωρηθεί ημιάπειρο, ποια δεύτερη οριακή συνθήκη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε;

γ) Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να μετατραπούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

δ) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

δα- Η συνιστώσα της ταχύτητας  $u$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ .

δβ- Η συνιστώσα της ταχύτητας  $u$  είναι συνάρτηση είναι συνάρτηση μόνο του  $y$ .

Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας παίρνοντας υπόψη σας την απάντησή σας στην ερώτηση γ)

ε) Παίρνοντας υπόψη σας τα παραπάνω γράψτε μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για την  $u$  στην οποία να εμφανίζονται μόνο δύο ανεξάρτητες μεταβλητές

Υποθέτουμε ότι η λύση για την  $u$  έχει τη μορφή:

$$u = Uf(\theta) \quad (1a)$$

$$\text{όπου } \theta = \frac{y}{2\sqrt{v} t} \quad (\text{I}\beta)$$

στην (Iβ)  $v$  είναι το κινηματικό ιξώδες.

ζ) Υπολογίστε την πρώτη παράγωγο της  $u$  ως προς τον χρόνο και την δεύτερη παράγωγο της ίδιας μεταβλητής ως προς τον χώρο, παίρνοντας υπόψη σας τις εξισώσεις (Iα) και (Iβ) σαν συνάρτηση της μεταβλητής  $\theta$ .

η) Συνδυάζοντας τις απαντήσεις σας στις ερωτήσεις δ) και ζ) γράψτε μία διαφορική εξίσωση για τη μεταβλητή  $f(\theta)$

θ) Μετατρέψτε τις αρχικές και οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή  $u$  –βλέπε ερωτήσεις (α και β)- στις κατάλληλες (αρχικές ή οριακές) συνθήκες για την εξίσωση  $f(\theta)$ .

ι) Επιλύστε την εξίσωση για τη μεταβλητή  $f$  θέτοντας  $\bar{f} = \frac{df}{d\theta}$  και ολοκληρώνοντας δύο φορές. Προσδιορίστε τις σταθερές ολοκλήρωσης παίρνοντας υπόψη σας την απάντησή σας στην ερώτηση θ.

κ) Γράψτε την αναλυτική μορφή για την  $u$

λ) Η παραπάνω λύση θα ίσχυε αν παράλληλα στην πλάκα που αναφέραμε είχαμε μία δεύτερη (ακίνητη) πλάκα σε απόσταση  $h$ ; Αν ναι για ποιες περιπτώσεις;



## 1.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

1) Δίνεται η εξίσωση του Darcy για ισότροπο μέσο και περίπτωση τρισδιάστατης ροής, σε διανυσματική μορφή:

$$\vec{v} = -K\nabla h \quad (\text{I})$$

- Διατυπώστε την (I) αναλυτικά χρησιμοποιώντας βαθμωτά μεγέθη
- Διατυπώστε την (I) με την βοήθεια των συμβάσεων Einstein
- Γνωρίζετε άλλες εξισώσεις της Φυσικής οι οποίες έχουν την δομή της (I);

2) Δίνεται η εξίσωση του Darcy για ανισότροπο μέσο και δισδιάστατη ροή:

$$v_i = -K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (\text{II})$$

- Πως ονομάζονται οι δείκτες i και j;
- Πως ονομάζεται η «μαθηματική οντότητα»  $K_{ij}$ ; Σε ποιες παραδόσεις την έχετε συναντήσει
- Αναπτύξτε την (II)

3) Δίνονται οι όροι

$$\nabla \vec{u}, \nabla^2 h, \nabla^2 \vec{u}$$

- Ποιοί από τους παραπάνω όρους είναι βαθμωτά μεγέθη ποιοί είναι διασύνδεματα;
- Αναπτύξτε τους για την περίπτωση

-Μονοδιάστατου φαινομένου

-Δισδιάστατου φαινομένου

## 2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

### 2.1 ΕΡΠΟΥΣΑ ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΦΑΙΡΑ

Εξετάζουμε την περίπτωση ροής γύρω από μία σφαίρα ακτίνας  $R$ .

Η σφαίρα θεωρείται ακίνητη. Θεωρούμε ότι μακριά από την σφαίρα το πεδίο ροής είναι σταθερό και παράλληλο στο άξονα  $z$ , και η ταχύτητα ίση με  $U_0$ .

Θεωρούμε τον αριθμό Reynolds  $Re = 2U_0R/\nu$  «πολύ μικρό» ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να είναι αμελητέες ( $Re \ll 1$ ).

Η έρπουσα ροή (creeping flow) νευτώνειου ρεστού περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων με μορφή:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \vec{u} = 0 \quad (2)$$

Απαλείφουμε την πίεση εφαρμόζοντας τον τελεστή  $rot$  στην εξίσωση (1), παίρνοντας υπόψη μας την ιδιότητα:

$$rot grad() = 0 \quad (3)$$

Ο τελεστής Stokes εκφράζεται από την σχέση:

$$\nabla^2 \vec{u} = grad(div \vec{u}) - rot(rot \vec{u}) \quad (4)$$

και παίρνοντας υπόψη μας τις (2) και (3):

$$rot \{ rot [ rot(\vec{u}) ] \} = 0 \quad (5)$$

Αδιαστατοποιούμε όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται χρησιμοποιώντας σαν χαρακτηριστικό μήκος την ακτίνα της σφαίρας  $R$  και σαν χαρακτηριστικό χρόνο το μέγεθος  $R/U_0$ .

Στην συνέχεια όλα μεγέθη δίνονται σε αδιάστατη μορφή, οι αστερίσκοι παραλείπονται για λόγους απλότητας

Για να λάβουμε υπόψη μας την οριακή συνθήκη μη ολίσθησης (no slip condition) στην επιφάνεια τα σφαίρας, χρησιμοποιούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες, θεωρώντας ότι η αρχή των συντεταγμένων συμπίπτει με το κέντρο της σφαίρας.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει των καρτεσιανών ως εξής:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \phi = \arctan(y/x), \theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$$

Οι σφαιρικές συντεταγμένες μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

$r$	Δίνει την απόσταση του σημείου $P$ από το κέντρο της σφαίρας
$\phi$	Ορίζει την θέση του σημείου $P$ ένα επίπεδο $xy$ κάθετο στον άξονα $z$
$\theta$	Ορίζει την γωνία που σχηματίζει η ευθεία που ενώνει το σημείο $P$ με την αρχή των αξόνων με τον άξονα $z$

Για το πρόβλημα που εξετάζουμε, λόγω της συμμετρίας εκ περιστροφής σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0, u_{\phi} = 0$$

Οι γραμμές ροής δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$u_r = \frac{1}{\sin \theta r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad (6\alpha)$$

$$u_{\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (6\beta)$$

Οι οριακές συνθήκες μετατρέπονται σε:

$$\text{Για } r = 1, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$

$$\text{Για } r \rightarrow \infty, \Psi \rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 \theta r^2$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$\Psi = f(r) \sin^2 \theta \quad (7)$$

και παίρνοντας υπόψη μας τις εξισώσεις (5-6), εκφράζοντας τον τελεστή  $rot$  σε σφαιρικές συντεταγμένες, καταλήγουμε σε μία κανονική διαφορική εξίσωση για την συνάρτηση  $f$ . Επιλύοντας την την και χρησιμοποιώντας την (7) προκύπτει το πεδίο ταχυτήτων:

$$u_r = \left[ 1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3} \right] \cos \theta \quad (8\alpha)$$

$$u_{\theta} = -\left[ 1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3} \right] \sin \theta \quad (8\beta)$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο των ταχυτήτων είναι συμμετρικό στο επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο πεδίο ροής και διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

Με βάση το πεδίο ταχυτήτων μπορώ να υπολογίσω τις τάσεις και το πεδίο πίεσης, και να υπολογίσω στην συνέχεια την δύναμη η οποία ασκείται απάνω στην σφαίρα:

$$F = 6R\pi\mu U_0 \quad (9)$$

Η (9) δίνεται σε διαστατική μορφή. Προφανώς η δύναμη είναι παράλληλη στον άξονα z.

Για περίπτωση σφαίρας η οποία κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ρευστό το οποίο ήταν αρχικά σε ισορροπία χρησιμοποιούμε την ίδια μεθοδολογία, αλλά σαν οριακές συνθήκες ότι το ρευστό ηρεμεί σε «άπειρη» απόσταση από την σφαίρα και ότι στην επιφάνεια της σφαίρας η ταχύτητα του ρευστού πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα της σφαίρας.

Προφανώς το πεδίο ταχυτήτων στις δύο περιπτώσεις θα είναι διαφορετικό αν εκφραστεί σε σύστημα συντεταγμένων Euler, η δύναμη όμως η οποία ασκείται απάνω στην σφαίρα είναι ίδια. (Βλέπε Ν. Κωτσοβίνος, Ρευστομηχανική, Εκδόσεις Δ.Π.Θ. 2003).

Η εξήγηση είναι απλή: αν χρησιμοποιήσουμε ένα κινητό σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο ο παρατηρητής κινείται με την ταχύτητα της σφαίρας, η σφαίρα φαίνεται ακίνητη και το ρευστό στο άπειρο να κινείται με ταχύτητα  $U_0$ .

Παρότι έγινε η υπόθεση ότι  $Re \ll 1$  οι σχέσεις που προέκυψαν ισχύουν με καλή ακρίβεια για αριθμούς Reynolds έως 0.5-1.

Επίσης είναι δεν είναι αυτονόητο ότι η λύση που περιγράφουμε ισχύει για όλη την εξεταζόμενη περιοχή.

Μπορούμε να υπολογίσουμε και το πεδίο ροής για έρπουσα ροή γύρω από κύλινδρο, ακολουθώντας ανάλογη μεθοδολογία με αυτήν που περιγράψαμε (Χρησιμοποιούμε τον τελεστή  $rot$ , εισαγάγουμε τις γραμμές ροής σε κυλινδρικές συντεταγμένες, παίρνουμε μία κανονική διαφορική εξίσωση εκφράζοντας τις με την σχέση  $\Psi = g(\tilde{\theta})\tilde{f}(\rho)$  κλπ.)

Η παραπάνω λύση δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για περιοχές κοντά στην σφαίρα, δεν συγκλίνει για μεγάλη απόσταση από την σφαίρα: Για  $\rho \rightarrow \infty$  η λύση συμπεριφέρεται σαν  $\approx \ln \rho$ , λύση η οποία δεν είναι αποδεκτή τόσο γιατί οδηγεί σε μη φυσικό αποτέλεσμα αλλά και επειδή έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι οι δυνάμεις αδρανείας είναι αμελητέες.

Η εξήγηση είναι ότι ακόμα και για πολύ χαμηλούς αριθμούς Reynolds, οι δυνάμεις αδρανείας δεν είναι αμελητέες μακριά από την στερεό αντικείμενο (στην περιοχή αυτή λόγω των χαμηλών κλίσεων οι όροι του ιξώδους γίνονται λιγότερο σημαντικοί).

Μια λύση του προβλήματος έδωσε ο Oseen ο οποίος για  $\rho \rightarrow \infty$  χρησιμοποίησε την προσέγγιση  $\vec{u} \nabla \vec{u} \cong \vec{U} \nabla \vec{u}$  όπου  $\vec{U}$  είναι η ταχύτητα για  $\rho \rightarrow \infty$  η οποία μπορεί και να εκφραστεί ως:  $\vec{U} = 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + U_0\vec{e}_z$

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις επιλύονται με μεθόδους ασυμπτωτικής ανάλυσης.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η παραδοχή ότι τα εξεταζόμενα σωματίδια είναι σφαιρικά σε εφαρμογές που ενδιαφέρουν τους Μηχανικούς Περιβάλλοντος δίνει καλά αποτελέσματα τόσο για την περίπτωση κόκκων άμμου, όσο για την περίπτωση φυσαλίδων αέρα κλπ.

Η παραδοχή δεν ισχύει όμως για τη μελέτη της καθίζησης σε αριθμό προβλημάτων που ενδιαφέρουν τους Μηχανικούς Περιβάλλοντος (π.χ. Δεξαμενές Δευτεροβάθμιας Καθίζησης σε Ε.Ε.Λ.): το σχήμα των σωματιδίων μοιάζει μάλλον με περισσότερο και οι τροχιές τους είναι δυνατόν να παρομοιαστούν σε μερικές περιπτώσεις με φύλλο που πέφτει από δέντρο. Η απόκλιση είναι μεγαλύτερη για σημαντικές τιμές του αριθμού Reynolds.

Μορφή η οποία δεν μπορεί να προσομοιωθεί με σφαιρική έχουν επίσης σωματίδια από άργιλο κλπ.

Η υδροδυναμική συμπεριφορά σφαιρικών σωματιδίων για την περίπτωση μη αμελητέων δυνάμεων αδρανείας περιγράφεται στην Ρευστομηχανική του Κωτσοβίνου.

Τόσο για την περίπτωση έρπουσας ροής όσο και για την περίπτωση μη αμελητέων όρων αδρανείας η ταχύτητα καθίζησης μπορεί να υπολογιστεί από το ισοζύγιο των δυνάμεων που ασκούνται στην σφαίρα. (Βλέπε Ν. Κωτσοβίνος, Ρευστομηχανική)

Ως εδώ έγινε η υπόθεση ότι τα σωματίδια κινούνται σε «άπειρο» ρευστό. Για την περίπτωση ομάδων σωματιδίων η υπόθεση αυτή δεν ισχύει. Για χαμηλούς αριθμούς Reynolds και χαμηλή «συγκέντρωση» των σωματιδίων, οι αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων είναι δυνατόν να ληφθούν υπόψη «διορθώνοντας» το ιξώδες. Πληροφορίες για την υδροδυναμική σε περίπτωση μεγαλύτερων συγκεντρώσεων δίνονται π.χ. στο βιβλίο *Low Number Hydrodynamics* των J. Happel και H. Brenner Prentice-Hall 1965.

Το πρόβλημα της υδροδυναμικής συμπεριφοράς για ομάδες σωματιδίων για την περίπτωση μη αμελητέων όρων αδρανείας εξετάζεται σε εξειδικευμένες δημοσιεύσεις (βλέπε π.χ. D.L. Koch & A. J.C. Ladd, (1997) Moderate Reynolds number flows through periodic and random arrays of alligned cylinders, *J. Fluid Mech.*, vol. 349, pp. 31-66).

Μία συνηθισμένη ερευνητική προσέγγιση του προβλήματος είναι η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes με συμβατικές (μέθοδος πεπερασμένων όγκων ελέγχου, πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων) ή μη συμβατικών μεθόδων (μέθοδος lattice-Boltzmann).

Πάντως ακόμα και σήμερα στις προσομοιώσεις τα σωματίδια θεωρούνται κυλινδρικά, επειδή η υπολογιστική ισχύς και επιτρέπει (για τις περισσότερες περιπτώσεις) την επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes μόνο για την περίπτωση της δισδιάστατης ροής.

## 2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΑΘΙΖΗΣΗΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΑΜΜΟΚΡΑΤΗ

Υπολογίστε την ταχύτητα καθίζησης ενός σωματιδίου άμμου διαμέτρου ενός χιλιοστού, μέσα σε αμμοκράτη.

Η πυκνότητα της άμμου θεωρείται ίση με  $\rho_s = 2600 \text{kgm}^{-3}$ , του νερού ίση με  $\rho = 1000 \text{kgm}^{-3}$  και το κινηματικό ιξώδες του νερού ίσο με  $\nu = 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

Για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{3}{\sqrt{\text{Re}}} + 0,34.$$

### ΛΥΣΗ

Υποθέτουμε ότι η ροή είναι έρπουσα.

Η ταχύτητα υπολογίζεται σε:

$$v_g = \frac{2 R^2 g}{9 \nu} \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) = \frac{2 (0,5 \cdot 10^{-3} \text{m})^2 9,81 \text{ms}^{-2}}{9 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}} \left( \frac{2600 \text{kgm}^{-3}}{1000 \text{kgm}^{-3}} - 1 \right) = 0,9 \text{ms}^{-1}$$

Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται σε:

$$\text{Re} = \frac{v_g d}{\nu} = \frac{0,9 \text{ms}^{-1} 10^{-3} \text{m}}{10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}} = 900 \gg 1.$$

Προφανώς η υπόθεση της έρπουσας ροής δεν ισχύει.

Η ταχύτητα πρέπει να προσδιορισθεί επαναληπτικά.

Υποθέτω ότι  $\text{Re}_0 = 900$  και υπολογίζω τον συντελεστή αντίστασης σε:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{3}{\sqrt{\text{Re}}} + 0,34 = \frac{24}{900} + \frac{3}{\sqrt{900}} + 0,34 = 0,467$$

Μία καινούργια εκτίμηση της ταχύτητας καθίζησης δίνεται από την σχέση:

$$v_g = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{g}{C_D} \frac{(\rho_s - \rho)}{\rho} R} = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{9,81}{0,467} \frac{(2600 - 1000)}{1000} 0,5 \cdot 10^{-3}} = 0,21 \text{m/s}$$

κατά συνέπεια ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται σε  $\text{Re}_1 = 210$ .

Προφανώς:  $\text{Re}_1 \neq \text{Re}_0$

Με τη νέα τιμή του αριθμού Reynolds ( $\text{Re}_1 = 210$ ) υπολογίζω τον συντελεστή

αντίστασης σε:  $C_D = \frac{24}{210} + \frac{3}{\sqrt{210}} + 0,34 = 0,66$ .

Η ταχύτητα καθίζησης εκτιμάται σε:

$$v_g = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{g}{C_D} \frac{(\rho_\sigma - \rho)}{\rho} R} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9,81 \cdot (2600 - 1000)}{3 \cdot 0,66 \cdot 1000}} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,18 \text{ m/s.}$$

Υπολογίζουμε τη νέα τιμή του αριθμού Reynolds σε  $Re_2 = 180$ .

Το σφάλμα που προκύπτει ανάμεσα σε δύο διαδοχικές εκτιμήσεις ως προς τον αριθμό Reynolds υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon = \left| \frac{Re_i - Re_{i-1}}{Re_i} \right| = \left| \frac{180 - 210}{180} \right| = 17\%.$$

Το σφάλμα ως προς τον αριθμό Reynolds είναι μεγαλύτερο από 10%, κατά συνέπεια συνεχίζουμε τους υπολογισμούς.

Η νέα εκτίμηση για τον συντελεστή αντίστασης είναι:

$$C_{D3} = \frac{24}{180} + \frac{3}{\sqrt{180}} + 0,34 = 0,70.$$

Με βάση τον συντελεστή αυτόν η ταχύτητα υπολογίζεται σε:  $v_g = 0,17 \text{ m/s}$  και ο

$$\text{αριθμός Reynolds σε: } Re_3 = \frac{0,17 \text{ m/s} \cdot 0,001 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 170.$$

Το σφάλμα ανάμεσα στις δύο τελευταίες επαναλήψεις

$$\varepsilon = \left| \frac{Re_3 - Re_2}{Re_3} \right| = \left| \frac{170 - 180}{170} \right| = 6\% < 10\% .$$

**Κατά συνέπεια η ζητούμενη τιμή της ταχύτητας είναι  $v_g = 0,17 \text{ m/s}$**



## 2.3 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΑΝΑΔΕΥΣΗΣ ΣΕ ΔΕΞΑΜΕΝΗ ΑΕΡΙΣΜΟΥ

Θέλουμε να επιτύχουμε ικανοποιητική ανάμιξη σε ένα κανάλι στο οποίο μεταφέρονται λύματα.

Για τον σκοπό αυτό τοποθετούμε διαχυτήρες στον πυθμένα του καναλιού από τους οποίους εξέρχονται φυσαλίδες αέρα διαμέτρου  $D = 1\text{mm}$ .

Η αποδοτικότητα του συστήματος είναι μέγιστη όταν η απόσταση  $L$  μεταξύ των διαχυτήρων είναι τέτοια ώστε όταν εισέρχονται από έναν διαχυτήρα οι φυσαλίδες στο κανάλι, οι φυσαλίδες από τον προηγούμενο διαχυτήρα να έχουν φθάσει την επιφάνεια του υγρού.

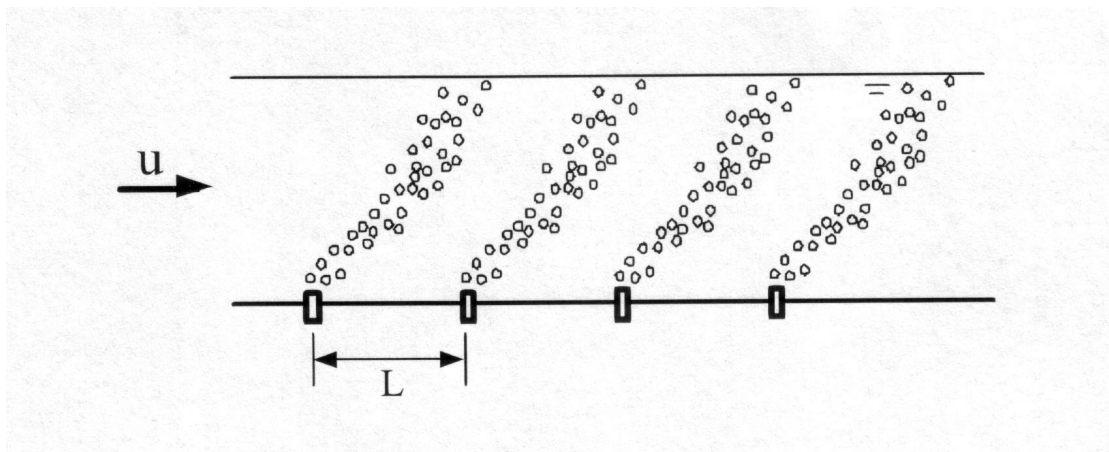
Η ροή στο κανάλι θεωρείται οριζόντια, η ταχύτητα των λυμάτων  $u = 1\text{m/s}$  και το βάθος ροής ίσο με  $h = 1\text{m}$ .

Η πυκνότητα του αέρα θεωρείται ίση με  $\rho_\phi = 1.4\text{kgm}^{-3}$ , η πυκνότητα του νερού ίση με  $\rho = 1000\text{kgm}^{-3}$  και το κινηματικό ιξώδες του νερού ίσο με  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2\text{s}^{-1}$ .

Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των φυσαλίδων θεωρούνται αμελητέες.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{3}{\sqrt{\text{Re}}} + 0,34.$$



ΛΥΣΗ

Ονομάζω την ταχύτητα ανύψωσης των φυσαλίδων  $v_\varphi$ .

Ο χρόνος για να φτάσει μία φυσαλίδα στην επιφάνεια είναι ίσος με:

$$T_{av} = \frac{h}{v_\varphi}$$

Κατά την διάρκεια του χρόνου αυτού οι φυσαλίδες θα έχουν διατρέξει κατά την οριζόντια απόσταση ίση με την απόσταση των διαχυτήρων:

$$L = uT_{av}.$$

Κατά συνέπεια η απόσταση μεταξύ των διαχυτήρων δίνεται από την σχέση:

$$L = u \frac{h}{v_\varphi} \quad (1)$$

Το μόνο άγνωστο μέγεθος στην παραπάνω σχέση είναι η ταχύτητα ανύψωσης  $v_\varphi$ .

Μπορώ να την υπολογίσω το μέγεθος αυτό αν θεωρήσω το ισοζύγιο μεταξύ των δυνάμεων άνωσης, βαρύτητας και αντίστασης στην ροή (η διαδικασία υπολογισμού είναι αντίστοιχη με αυτή του υπολογισμού της ταχύτητας καθίζησης.)

Καταρχάς θεωρώ ότι η ροή είναι έρπουσα (creeping flow). Λαμβάνοντας υπόψη πως η φορά της ταχύτητας είναι αντίστροφη από αυτήν για την περίπτωση της καθίζησης (δηλαδή αντίθετη στην φορά την επιτάχυνσης της ταχύτητας), μπορώ να υπολογίσω την ταχύτητα ανύψωσης από την σχέση:

$$v_\varphi = \frac{2}{9} \frac{R^2 g}{\nu} \left( 1 - \frac{\rho_\varphi}{\rho} \right) = \frac{2}{9} \frac{(0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 9,81 \text{ ms}^{-2}}{10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}} \left( 1 - \frac{1,4 \text{ kgm}^{-3}}{1000 \text{ kgm}^{-3}} \right) = 0,54 \text{ ms}^{-1}$$

Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται σε:

$$\text{Re} = \frac{v_\varphi d}{\nu} = \frac{0,54 \text{ ms}^{-1} 10^{-3} \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}} = 540 \gg 1. \text{ Προφανώς η υπόθεση της έρπουσας ροής δεν ισχύει.}$$

Η ταχύτητα πρέπει να υπολογιστεί επαναληπτικά με διαδοχικές προσεγγίσεις.

Υποθέτω ότι  $Re_0 = 540$ . Ο συντελεστής αντίστασης εκτιμάται σε:

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{3}{\sqrt{Re}} + 0,34 = \frac{24}{540} + \frac{3}{\sqrt{540}} + 0,34 = 0,51$$

Μία καινούργια εκτίμηση της ταχύτητας ανύψωσης δίνεται από την σχέση:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{8g(\rho - \rho_\phi)}{3C_D \rho}} R = \sqrt{\frac{8 \cdot 9,81 \cdot (1000 - 1,4)}{3 \cdot 0,51 \cdot 1000}} 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,16 \text{ m/s}$$

Κατά συνέπεια ο αριθμός Reynolds ο οποίος αντιστοιχεί στην νέα αυτή εκτίμηση είναι  $Re_1 = 160$ .

Προφανώς:  $Re_1 \neq Re_0$

Η δεύτερη επανάληψη δίνει:

$$C_{D2} = \frac{24}{160} + \frac{3}{\sqrt{160}} + 0,34 = 0,73$$

Η ταχύτητα ανύψωσης υπολογίζεται σε  $v_\phi = 0,13 \text{ m/s}$ .

Ο αριθμό Reynolds μπορεί να εκτιμηθεί εκ νέου σε:

$$Re_2 = \frac{v_\phi d}{\nu} = \frac{0,13 \text{ ms}^{-1} 10^{-3} \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}} = 130$$

Το σφάλμα ανάμεσα στις δύο τελευταίες επαναλήψεις είναι:

$$\varepsilon = \left| \frac{Re_i - Re_{i-1}}{Re_i} \right| = \left| \frac{130 - 160}{130} \right| \cong 23\% > 10\%$$

Συνεχίζοντας την διαδικασία βρίσκω:

$$C_{D3} = \frac{24}{130} + \frac{3}{\sqrt{130}} + 0,34 = 0,79, v_\phi \cong 0,13 \text{ m/s} \text{ και } Re_3 = 130.$$

Προφανώς μπορώ να θεωρήσω ότι έχει επιτυχθεί σύγκλιση και να θεωρήσω την τιμή της ταχύτητας ανύψωσης ίση με  $v_\phi = 0,13 \text{ m/s}$ .

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1) υπολογίζω την επιθυμητή απόσταση μεταξύ των διαχυτήρων σε:

$$L = u \frac{h}{v_\varphi} = 1m/s \frac{1m}{0,13m/s} = 7,69m$$

### 3. ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

#### 3.1 ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Αδιάστατοι αριθμοί	Συμβολισμός	Ορισμός	Πεδίο Εφαρμογών	Συμβολισμοί
Reynolds	Re	$\frac{\rho V l}{\mu}$	Εν δυνάμει σε όλα τα προβλήματα της Ρευστομηχανικής	l: χαρακτηριστικό μήκος V: χαρακτηριστική ταχύτητα
Froude	Fr	$\frac{V}{\sqrt{lg}}$	Ροές με ελεύθερη επιφάνεια	g: επιτάχυνση της βαρύτητας
Euler	Eu	$\frac{p}{\rho V^2}$	Προβλήματα στα οποία είναι σημαντική η πίεση ή διαφορές πίεσης	p: πίεση
Mach	Ma	$\frac{V}{c}$	Προβλήματα με μεγάλες ταχύτητες στα οποία είναι σημαντική η συμπίεστικότητα του ρευστού	c: ταχύτητα του ήχου
Strouhal	St	$\frac{\omega l}{V}$	Μη μόνιμες ροές (π.χ. ροές με ταλαντώσεις)	$\omega$ : χαρακτηριστική συχνότητα
Weber	We	$\frac{\rho V^2 l}{\sigma}$	Προβλήματα για τα οποία είναι σημαντικές οι επιφανειακές τάσεις	$\sigma$ : επιφανειακή τάση

**Πηγή:**

*Munson, Young Okiishi Fundamentals of Fluid Mechanics (1998). Εκδοτικός οίκος John Wiley & Sons, Τρίτη έκδοση*

## 3.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

### 3.2.1 ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ ΝΟΜΟΥ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Θέλουμε να μελετήσουμε πειραματικά μία κατασκευή (πρωτότυπο) στην οποία λαμβάνουν χώρα ροή κατασκευάζοντας ένα εργαστηριακό ομοίωμα σε κλίμακα 5:1 (το εργαστηριακό ομοίωμα είναι πέντε φορές μεγαλύτερο).

1) Όσο αφορά τη μελέτη φαινομένων και διεργασιών με την βοήθεια εργαστηριακών ομοιωμάτων τι σημαίνουν οι παρακάτω προτάσεις:

- Το φαινόμενο διέπεται από νόμο ομοιότητας *Froude*
- Το φαινόμενο διέπεται από νόμο ομοιότητας *Reynolds*
- Το φαινόμενο διέπεται από νόμο ομοιότητας *Weber*

2) Ποιος είναι ο χρόνος λειτουργίας του εργαστηριακού ομοιώματος ο οποίος αντιστοιχεί σε μία ώρα λειτουργίας του πρωτοτύπου σε κάθε μία από τις δύο παρακάτω περιπτώσεις αντίστοιχα:

- Το φαινόμενο διέπεται από νόμο ομοιότητας *Froude*
- Το φαινόμενο διέπεται από νόμο ομοιότητας *Weber*

Και στις δυο περιπτώσεις (ροή στο πρωτότυπο και ροή στο εργαστηριακό ομοίωμα) το υγρό που χρησιμοποιείται είναι νερό και οι ιδιότητες του (πυκνότητα, ιξώδες, επιφανειακή τάση λόγω της επαφής με την στερεά φάση κλπ.) είναι ταυτόσημες.

3) -Περιγράψτε **σύντομα** πως είναι δυνατόν να εξασφαλίσετε τέτοιες συνθήκες λειτουργίας του εργαστηριακού ομοιώματος ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα τόσο ο νόμος ομοιότητας *Froude* όσο ο νόμος ομοιότητας *Reynolds*.

### 3.2.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΩΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

Θέλουμε να μελετήσουμε την λειτουργία ενός μεγάλου φράγματος το οποίο κατασκευάζεται για αντιπλημμυρική προστασία και για υδρευτικούς σκοπούς, με την βοήθεια εργαστηριακού ομοιώματος υπό κλίμακα. Για την λειτουργία αυτού του ομοιώματος θα χρησιμοποιήσουμε νερό. Η ροή στο συγκεκριμένο πρόβλημα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας.

α) Εξηγείστε σύντομα για ποιο λόγο μελετάμε υδραυλικά φαινόμενα υπό κλίμακα.

β) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

β1) Πρέπει να σχεδιάσουμε το εργαστηριακό ομοίωμα έτσι ώστε ο αριθμός Froude να είναι ίδιος με το πραγματικό πρόβλημα έστω αν ο αριθμός Reynolds είναι διαφορετικός

β2) Πρέπει να σχεδιάσουμε το εργαστηριακό ομοίωμα έτσι ώστε ο αριθμός Reynolds να είναι ίδιος με το πραγματικό πρόβλημα έστω αν ο αριθμός Froude είναι διαφορετικός

β3) Πρέπει να σχεδιάσουμε το εργαστηριακό ομοίωμα έτσι ώστε ο αριθμός Reynolds και ο αριθμός Froude να είναι ίδιοι

γ) Αν το ομοίωμα που θα κατασκευάζατε είναι γραμμικό, και σας έδιναν το ύψος του φράγματος  $L_f$ , και την ταχύτητα του υγρού στον αγωγό εκτόνωσης  $U_e$  πως θα ορίζατε τους αριθμούς Reynolds και Froude;  
Αιτιολογείστε σύντομα την απάντησή σας

δ) Παίρνοντας υπόψη σας την αλματώδη αύξηση των δυνατοτήτων των υπολογιστών και τις προόδους της επιστήμης της αριθμητικής ανάλυσης, κατά την γνώμη σας ποια από τις παρακάτω τις απαντήσεις είναι σωστή:

δ1) Τα εργαστηριακά ομοιώματα είναι κυρίως χρήσιμα για τη μελέτη προβλημάτων στα οποία η ροή είναι στρωτή

δ2) Τα εργαστηριακά ομοιώματα είναι κυρίως χρήσιμα για τη μελέτη προβλημάτων στα οποία η ροή είναι τυρβώδης

δ3) Τα εργαστηριακά ομοιώματα έχουν ξεπεραστεί εδώ και μία δεκαετία.  
Αιτιολογείστε σύντομα την απάντησή σας

### 3.2.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΎΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΑΠΟΒΑΘΡΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

Για τη μελέτη κατασκευής μιας ορθογωνικής αποβάθρας σ'ένα ποταμό με βάθος ροής  $Y=2.7\text{m}$  και πλάτος  $B=12\text{m}$ , κατασκευάστηκε σε εργαστήριο ομοίωμα της αποβάθρας με κλίμακα 1:16. Αν στο ομοίωμα η ταχύτητα ροής είναι  $U=0.75\text{ m/sec}$ , η δύναμη που ασκείται είναι  $F=4\text{ Newton}$ , και το ύψος του κύματος που σχηματίζεται στην άκρη του ομοιώματος είναι  $L=4.8\text{ cm}$  να βρεθούν : α) η ταχύτητα του νερού και η δύναμη που ασκείται στην αποβάθρα β) το ύψος του κύματος που θα σχηματίζεται στην αποβάθρα και γ) ο συντελεστής αντιστάσεως των δυνάμεων αντίστασης (τριβής).

Από την διαστατική ανάλυση γνωρίζουμε ότι η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα από ένα πεδίο ροής υπολογίζεται από την σχέση:

$$F = C_D \cdot \rho \cdot A \frac{U^2}{2} \text{ όπου } A \text{ διατομή του στερεού σώματος κάθετα στην ροή}$$

#### ΛΥΣΗ

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε ροή με ελεύθερη επιφάνεια σε τυρβώδη δίαυτα οπότε το φαινόμενο διέπεται από τους νόμους ομοιότητας Froude .  
Δίδεται  $Y_p=2.7\text{m}$ ,  $B_p=12\text{m}$ ,  $U_o=0.75\text{ m/sec}$ ,  $F_o=4\text{ Newton}$ ,  $L=4.8\text{ cm}$

$$Fr = \frac{U_p^2}{gL_p} = \frac{U_o^2}{gL_o},$$

Δηλ.

$$h \quad \frac{U_p^2}{U_o^2} = \frac{L_p}{L_o} = Lr \quad (1),$$

Γνωρίζοντας ότι

$$F = C_D \cdot \rho \cdot A \frac{U^2}{2}$$

$$\frac{F_p}{F_o} = \frac{(C_D)_p (\rho)_p (A)_p (U_p^2)}{(C_D)_o (\rho)_o (A)_o (U_o^2)}$$

Αφού το ρευστό στο πρωτότυπο και το ομοίωμα θα είναι το ίδιο θα έχω  $\rho_p = \rho_o$ .



Το πείραμα έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε ο αριθμός Froude στο πρωτότυπο και το ομοίωμα να είναι ίδιος. Αφού το φαινόμενο διέπεται από τον αριθμό Froude ο συντελεστής αντίστασης θα είναι ο ίδιος και στις δύο περιπτώσεις

$$\Rightarrow \frac{F_p}{F_o} = \frac{L_p^2 U_p^2}{L_o^2 U_o^2}$$

οπότε βάσει της (1)

$$\frac{F_p}{F_o} = \frac{L_p^3}{L_o^3}$$

α) Η ταχύτητα του νερού στην αποβάθρα θα είναι βάσει των παραπάνω :

$$U_\pi = U_o (Lr)^{1/2} = (0.75)(16)^{1/2} = 3m/sec$$

ενώ η δύναμη που θα ασκείται στην αποβάθρα θα είναι :

$$F_\pi = F_o Lr^3 = (4)(16)^3 = 16384Nt$$

β) το ύψος κύματος που θα σχηματισθεί στην αποβάθρα θα είναι :

$$L_\pi = L_o Lr = (4.8)(16) = 76.8cm = 0.77m$$

γ) Τέλος ο συντελεστής αντιστάσεως  $C_D$  των δυνάμεων αντίστασης που δίδονται από τη σχέση

$$F = C_D \cdot \rho \cdot A \frac{U^2}{2}$$

θα είναι όσο αφορά το πρωτότυπο ο εξής :

$$C_D = \frac{F}{\rho A U^2 / 2} = \frac{16384 * 2}{1000 * 12 * 2.7 * 3^2} = 0.11$$

## 4. ΘΕΩΡΙΑ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

### 4.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

#### 4.1.1. Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΙΞΩΔΟΥΣ

Σε πολλά πρακτικά προβλήματα τυρβώδους ροής είναι σκόπιμο να μην εξετάσουμε τα στιγμιαία μεγέθη που υπεισέρχονται λόγω τους «χαοτικού» χαρακτήρα του φαινομένου, αλλά μέσες τιμές των μεγεθών αυτών.

Ο μέσες τιμές αναφέρονται σε μία κατάλληλη ολοκλήρωση στον χρόνο: Π.χ. η μέση ταχύτητα μπορεί να οριστεί σαν:

$$\langle u \rangle = \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (1)$$

Για λόγους ευκρίνειας χρησιμοποιούμε συχνά για τα μέσα μεγέθη τα αντίστοιχα κεφαλαία γράμματα π.χ.  $\bar{u} = U$ .

όπου  $u$  η στιγμιαία ταχύτητα και  $T$  ο χρόνος ολοκλήρωσης, ο οποίος πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος για να μην επηρεάζει το εξεταζόμενο μέγεθος. Σαν διαταραχή της ταχύτητας ορίζεται το μέγεθος  $u' = u - U$

Ανάλογη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και για τα υπόλοιπα μεγέθη, που εμφανίζονται στις εξισώσεις Navier Stokes ή σε άλλες εξισώσεις μεταφοράς (πίεση, θερμοκρασία, συγκεντρώσεις).

Το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει, δεν είναι πια ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων επειδή εμφανίζονται επιπλέον άγνωστοι όροι: οι τυρβώδεις τάσεις  $\bar{\tau}_{ij} = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle$ .

Ονομάζουμε εδώ «επιπλέον» όρους τους αγνώστους εκτός των μέσων ταχυτήτων και της μέσης πίεσης. (βλέπε Ρευστομηχανική του Ν. Κωτσοβίνου, εκδόσεις Δ.Π.Θ.)

Οι τάσεις αυτές μπορούν να εκτιμηθούν για αρκετές ροές πρακτικού ενδιαφέροντος εφαρμόζοντας την υπόθεση του τυρβώδους ιξώδους η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$-\bar{\tau}_{ij} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα και  $\delta_{ij}$  το δέλτα του Kronecker.

Ο συντελεστής  $\mu_t$  καλείται τυρβώδης ιξώδης (turbulent viscosity, eddy viscosity) και εξαρτάται από την δομή της τυρβώδους ροής.

Η μεταβλητή  $k$  ονομάζεται κινητική ενέργεια της τύρβης και ορίζεται σαν:

$$k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle = \frac{1}{2} (\langle u_1'^2 \rangle + \langle u_2'^2 \rangle + \langle u_3'^2 \rangle)$$

(Οι όροι  $u'_i$  συμβολίζουν διαταραχές της ταχύτητας).

Μία περιγραφή της φυσικής σημασίας του παρακάτω μεγέθους δίνεται στην επόμενη παράγραφο.

Επειδή τα χαρακτηριστικά της ροής αυτής μεταβάλλονται στον χώρο, η τιμή του συντελεστή του τυρβώδους ιξώδους δεν μπορεί να θεωρηθεί σταθερή.

Είναι προφανές ότι παρά τα προτερήματα της η υπόθεση του τυρβώδους ιξώδους δεν ισχύει για όλες τις ροές. .

Η εκτίμηση του συντελεστή  $\mu_t$  είναι ένα βασικό κλειδί για την επιτυχία ενός μοντέλου. Κατά κανόνα η εκτίμηση του γίνεται με έναν αριθμό διαφορικών εξισώσεων που συνδέουν το τυρβώδες ιξώδες με τα χαρακτηριστικά της τύρβης (αναφερόμαστε σε «επιπλέον διαφορικές εξισώσεις εκτός των εξισώσεων Navier Stokes»). Ο τύπος ενός μοντέλου εξαρτάται από τον αριθμό των «επιπλέον» διαφορικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται.

Πριν αναφερθούμε στην μαθηματική δομή των εξισώσεων για την περιγραφή της τυρβώδους ροής είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε στοιχειωδώς το φαινόμενο τα τύρβης από φυσική άποψη.

## **4.1.2 ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ**

Η τυρβώδης ροή:

- είναι ακανόνιστη
- είναι μη μόνιμη
- χαρακτηρίζεται από έντονη ανάμιξη διαφόρων μεγεθών (ορμής, θερμοκρασίας, συγκέντρωσης)
- χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη στροβίλων
- συνδέεται με κατανάλωση ενέργειας

Η κινητική ενέργεια η οποία είναι απαραίτητη για την δημιουργία των «διακυμάνσεων» της ταχύτητας (και την δημιουργία στροβίλων) αποσύρεται από την κυρίως ροή με την βοήθεια στροβίλων "μεγάλου μεγέθους  $L$  οι οποίοι μετατρέπονται διαδοχικά σε μικρότερους στροβίλους φθίνοντος μεγέθους.

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται, ουσιαστικά χωρίς απώλεια ενέργειας, μέχρι την εμφάνιση στροβίλων ενός (ελάχιστου) κρίσιμου μεγέθους  $\eta$  οι οποίοι μετατρέπουν την κινητική ενέργεια της τύρβης σε θερμότητα. (Είναι ουσιαστικά υπεύθυνοι για την «απώλεια» ενέργειας.)

Για την ποσοτική περιγραφή των παραπάνω φαινομένων χρησιμοποιούμε τα εξής μεγέθη:

- Την κινητική ενέργεια της τύρβης (ή ένταση της τύρβης)  $k$
- Την καταστροφή κινητικής ενέργειας  $\varepsilon$

Η ποσοτική μορφή για την κινητική ενέργεια της τύρβης είχε δοθεί παραπάνω.

Μία εκτίμηση για το μέγεθος των «μεγάλων» στροβίλων δίνεται από την σχέση:

$$L = k^{\frac{3}{2}} / \varepsilon .$$

Αντίστοιχα μία εκτίμηση για το μέγεθος των «μικρών» στροβίλων (οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για τη μετατροπή της κινητικής ενέργειας σε θερμότητα) δίνεται από την σχέση:

$$\eta = \left( \nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4} , \text{ όπου } \nu \text{ το κινηματικό ιξώδες.}$$

Όσο η τύρβη γίνεται πιο σημαντική, ο λόγος των μεγεθών των μεγάλων στροβίλων προς τους μικρούς αυξάνεται.

### 4.1.3. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΙΞΩΔΟΥΣ

Το τυρβώδες ιξώδες  $\mu_t$  περιγράφει την αυξημένη μεταφορά ορμής λόγω τους φαινομένου της τύρβης. Για τους λόγους αυτούς έχει προταθεί προσομοίωση του με βάση διάφορα χαρακτηριστικά μεγέθη που περιγράφουν την τύρβη: της κινητικής ενέργειας  $k$  και του μεγέθους των μεγάλων στροβίλων  $L$ : Μία προσέγγιση είναι λοιπόν να χρησιμοποιηθεί μία σχέση του τύπου  $\mu_t \cong k^m L^n$ , όπου οι εκθέτες  $m$  και  $n$  παίρνουν διαφορετικούς συνδυασμούς από τιμές.

Ένα από τα μοντέλα που έχουν επικρατήσει στην πράξη είναι η χρήση της σχέσης που είχαμε δει προηγουμένως:

$$L = k^{\frac{3}{2}} / \varepsilon$$

Με βάση την παραπάνω το τυρβώδες ιξώδες προσομοιώνεται με το γνωστό μοντέλο **k-ε**:

$$\mu_t = c_\mu \rho k^2 / \varepsilon$$

Όπου  $c_\mu$  μία σταθερά που εκτιμάται πειραματικά.

Η προσέγγιση αυτή έχει καλά αποτελέσματα για μεγάλο αριθμό πρακτικών προβλημάτων (όχι όμως για όλα, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως για αρκετά δεν μοντέλα ισχύει καν η χρήση της προσέγγισης του τυρβώδους ιξώδους για την προσομοίωση των αντίστοιχων τάσεων)

Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που επιτρέπουν τον υπολογισμό των μεγεθών  $k$ - $\epsilon$ , μπορούν να γραφούν με κατάλληλο χειρισμό των «στιγμιαίων» και ομογενοποιημένων (ως προς τον χρόνο) εξισώσεων Navier-Stokes.

Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις μεταφοράς, σχηματίζουν μαζί με τις ομογενοποιημένες εξισώσεις Navier-Stokes και την εξίσωση συνέχειας, ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων το οποίο μπορεί να επιλυθεί με την χρήση κατάλληλων αριθμητικών μεθόδων.

Παρόλο που τα μοντέλα για την τύρβη είχαν αναπτυχθεί αρχικά για εφαρμογές σε προβλήματα αεροδυναμικής, μηχανολογίας κλπ., τα τελευταία είκοσι περίπου χρόνια εφαρμόζονται με επιτυχία σε προβλήματα που σχετίζονται με την προστασία του περιβάλλοντος.

#### BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Wolfgang Rodi: Turbulence Models and their Application in Hydraulics. *A state of the Art Review* A. Balkema/Rotterdam/Brookfield/2000 (Υπάρχει στην βιβλιοθήκη)

## 4.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

### 4.2.1 ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΤΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

Δίνονται οι εξισώσεις Navier Stokes με την παρακάτω μορφή:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$u, v, w$  είναι η συνιστώσες της ταχύτητας κατά τις διευθύνσεις  $x, y, z$  αντίστοιχα,  $P$  είναι το πεδίο πίεσης,  $\rho$  είναι η πυκνότητα,  $\mu$  είναι το δυναμικό ιξώδες,  $t$  είναι ο χρόνος.  $\vec{f}$  είναι το πεδίο των εξωτερικών δυνάμεων.

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

A) Η παραπάνω μορφή των εξισώσεων αντιστοιχεί σε μία περιγραφή κατά Lagrange ή σε μια περιγραφή κατά Euler;

A1α) Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν για νευτώνεια ή μη νευτώνεια ρευστά;

A1β) Αναφέρετε ένα νευτώνιο και ένα μη νευτώνιο ρευστό. )

B) Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων; Αν όχι ποιες άλλες εξισώσεις θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας.

Γ) Γράψτε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων για την περίπτωση έρπουσας μόνιμης ροής ( $Re \ll 1$ ), για αμελητέες εξωτερικές δυνάμεις και δισδιάστατο φαινόμενο, στην πιο απλή δυνατή μορφή

Δ) Για ποιά περίπτωση οι παραπάνω εξισώσεις της Μηχανικής Ρευστών σχετίζονται με την θεωρία του Χάους;

E) Μία τυπική μεθοδολογία προσομοίωσης της ροής για την περίπτωση της τύρβης είναι η εισαγωγή «μέσων» μεγεθών:

E1-Ποια η σχέση τους με τα στιγμιαία μεγέθη;

E2-Οι εξισώσεις που περιγράφουν τυρβώδη ροή είναι δυνατόν να είναι ανεξάρτητες του χρόνου

- Για την περίπτωση χρήσης στιγμιαίων μεγεθών;
- Για την περίπτωση χρήσης μέσων μεγεθών;

Ε3) Για την περίπτωση χρήσης μέσων μεγεθών η προσομοίωση ποιών όρων παρουσιάζει πρόβλημα; Ποια είναι η φυσική τους και ποια η μαθηματική ονομασία των όρων αυτών; Ποια αντίδοτα γνωρίζεται για την περίπτωση αυτή;

Ζ) Για την περίπτωση ισχύος των παραπάνω εξισώσεων η αραίωση της συγκέντρωσης των ρυπαντών στην ατμόσφαιρα είναι ποιο έντονη για μικρούς ή μεγάλους αριθμούς Reynolds; Γιατί;

Η απάντηση που δώσατε ισχύει και για την περίπτωση ρύπανσης μίας λίμνης;

## 4.2.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΥΡΒΩΔΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Ένας φοιτητής του τμήματος Μηχανικών Περιβάλλοντος, στα πλαίσια της διπλωματικής του, έχει αναλάβει να κάνει μετρήσεις της μέσης ταχύτητας (ως προς τον χρόνο), σε ένα αριθμό χειμάρρων του νομού Ξάνθης με τη βοήθεια ειδικού οργάνου.

Ρώτησε τρεις συμφοιτητές του οι οποίοι παίρνοντας υπόψη τους ότι η ροή σε όλες τις περιπτώσεις είναι τυρβώδης, ότι μπορεί να θεωρηθεί μακροσκοπικά μόνιμη και ότι ο αριθμός των σημείων που θα πρέπει να γίνουν οι μετρήσεις σε κάθε χείμαρρο είναι μεγάλος, κατέθεσαν τις παρακάτω απόψεις:

1. Όταν η ροή είναι τυρβώδης και οι οριακές συνθήκες ανεξάρτητες του χρόνου, τα χαρακτηριστικά της ροής είναι ανεξάρτητα του χρόνου. Κατά συνέπεια η διάρκεια της μέτρησης δεν έχει καμία σημασία
2. Ο χρόνος που θα πρέπει να γίνει η μέτρηση σε κάθε σημείο πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος, ώστε η μέση τιμή της ταχύτητας να είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο μέτρησης. Κατά συνέπεια περισσότερες δοκιμές είναι απαραίτητες για να βρεθεί μία μέση τιμή μετρημένη με τέτοιο τρόπο ώστε να πληρούνται οι παραπάνω συνθήκες.
3. Με την σημερινή αλματώδη εξέλιξη της τεχνολογίας, ο χρόνος που θα γίνει η μέτρηση δεν έχει σημασία, αν είναι διαθέσιμος ο κατάλληλος εξοπλισμός. Πολλά επιστημονικά όργανα μπορούν να εκτιμήσουν την μέση ταχύτητα με ελάχιστα δεδομένα, αφού έχουν ενσωματωμένο λογισμικό για την επίλυση της εξίσωσης Navier-Stokes (εκφρασμένη σε στιγμιαία μεγέθη) όπως επίσης τα κατάλληλα πακέτα λογισμικού στατιστικής. Αυτό λοιπόν που πρέπει να ελεγχθεί είναι αν το όργανο μέτρησης διαθέτει τα κατάλληλα λογισμικά.

Είναι κάποια από τις απόψεις σωστές; Αν ναι ποια; Αιτιολογείστε την απάντησή σας, ενδεχομένως με την βοήθεια σκαριφήματος

Αναφέρετε και αναλύστε σύντομα τα κατά την γνώμη σας τα πιο σημαντικά λάθη τα οποία περιέχονται στις παραπάνω προτάσεις.



## 5. ΘΕΩΡΙΑ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΙΒΑΔΑΣ

### 5.1 ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΙΒΑΔΑΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΕΠΙΠΕΔΗ ΠΛΑΚΑ

Θεωρώ ροή γύρω από επίπεδη πλάκα . Η ροή είναι ασυμπίεστη και η πίεση σταθερή. Πάνω από την πλάκα σχηματίζεται οριακή στιβάδα πάχους  $\Delta$ . Στο εσωτερικό οριακής στιβάδας της η ροή είναι δισδιάστατη και ισχύει:

$$u_x \gg u_y \text{ και } \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

Η εξίσωση Navier-Stokes γύρω από δισδιάστατη επίπεδη πλάκα γράφεται:

$$-\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = -\rho \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (1)$$

ενω έξω από την οριακή στιβάδα το πεδίο ταχύτητας είναι σταθερό με μία μόνο συνιστώσα:  $u_x = U_\infty = const$

Η εξίσωση της συνέχειας γράφεται:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \rho(U_\infty - u_x) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho(U_\infty - u_x) \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Προσθέτοντας την εξίσωση (2) στην δεξιά μεριά της (1):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho(U_\infty - 2u_x) \frac{\partial u_x}{\partial x} - \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho(U_\infty - u_x) \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \Rightarrow \rho \left[ \frac{\partial(U_\infty u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(u_x u_x)}{\partial x} \right] + \rho \left[ u_y \frac{\partial(U_\infty - u_x)}{\partial y} + (U_\infty - u_x) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] &= -\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \Rightarrow \rho \left[ \frac{\partial[u_x (U_\infty - u_x)]}{\partial x} \right] + \rho \left[ \frac{\partial[u_y (U_\infty - u_x)]}{\partial y} \right] &= -\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (3) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την (3) σε όλο το πάχος της οριακής στιβάδας δηλαδή από 0 έως  $\Delta$ :

$$\Rightarrow \rho \int_0^{\Delta} \left( \frac{\partial [u_x (U_\infty - u_x)]}{\partial x} \right) \partial y + \rho [u_y (U_\infty - u_x)]_0^{\Delta} = -\mu \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]_0^{\Delta}$$

Παίρνω υπόψη μου ότι πάνω στη πλάκα ( $y=0$ ) ισχύει η συνθήκη της μη ολίσθησης, και ότι για  $y \geq \Delta$ ,  $u_x = U_\infty$

$$\Rightarrow \int_0^{\Delta} \left( \frac{\partial [u_x (U_\infty - u_x)]}{\partial x} \right) \partial y = +\nu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_0 \quad (4)$$

Το δεξιό μέρος της (4) δηλώνει την κλίση της συνιστώσας  $u_x$  απάνω στην επιφάνεια της πλάκας.

Για να υπολογίσω το πάχος της οριακής στιβάδας κάνω χρήση της αρχής της ομοιότητας υποθέτω ότι

$$\frac{u_x}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{\Delta}\right) = f(\eta)$$

Εισάγουμε δηλαδή μία νέα μεταβλητή  $\eta = \frac{y}{\Delta}$ .

Οι οριακές συνθήκες γράφονται:

$$\Rightarrow \rho \int_0^{\Delta} \left( \frac{\partial [u_x (U_\infty - u_x)]}{\partial x} \right) \partial y + \rho [u_y (U_\infty - u_x)]_0^{\Delta} = -\mu \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]_0^{\Delta} \quad \text{για } y=0, \eta=0, u_x=0, f(\eta)=0 \quad (5^a)$$

$$\text{για } y=\Delta, \eta=1, u_x=U_\infty, f(\eta)=1 \quad (5^b)$$

επίσης

$$\left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_0 = \left( \frac{\partial [U_\infty f(\eta)]}{\partial y} \right)_0 = U_\infty \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_\infty}{\Delta} \left( \frac{\partial f(0)}{\partial \eta} \right) \quad (6)$$

για την δεξιά πλευρά της (4) έχω

$$\int_0^{\Delta} \left( \frac{\partial [u_x (U_\infty - u_x)]}{\partial x} \right) \partial y = (U_\infty)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Delta \int_0^1 f(1-f) d\eta \right] \quad (7)$$

παίρνω υπόψη μου ότι:

$$\Delta \frac{d\Delta}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\Delta^2}{dx}$$

συνδυάζοντας τις (5), (6) και (7)

ολοκληρώνοντας την συνάρτηση που προκύπτει και ξέροντας ότι για  $x=0, \Delta=0$

προκύπτει ότι

$$\Delta^2 = \frac{2\nu f'(0)}{U_\infty \int_0^1 f(1-f)d\eta} x \quad (8)$$

Για να επιλύσω την (8) πρέπει να υποθέσω ένα προφίλ για την συνάρτηση f

Η πιο απλή υπόθεση είναι ότι:

$$\frac{u_x}{U_\infty} = f(\eta) = \eta = \left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (9)$$

η οποία εκπληρεί προφανώς τις οριακές συνθήκες (5).

Χρησιμοποιώ τις σχέσεις:

$$\int_0^1 (\eta(1-\eta))d\eta = \frac{1}{6} \text{ και } f'(0) = 1$$

Κατά συνέπεια

$$\Delta = 3.464 \sqrt{\nu x / U_\infty} \quad (10)$$

Ένα πιο ρεαλιστικό προφίλ ταχυτήτων είναι αυτό που είχε προταθεί από τον Prandtl:

$$\frac{u_x}{U_\infty} = f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \quad (11)$$

όπου  $\eta = y / \Delta$

Προφανώς η

εξίσωση (11) ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες οι οποίες δίνονται από την (5). Μία αιτιολόγηση για την επιλογή αναπτύσσεται στη Ρευστομηχανική του Κωτσοβίνου, εκδόσεις Δ.Π.Θ.

$$f'(\eta) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\eta^2$$

Μπορώ να υπολογίσω ότι:

$$\int_0^1 \left( \left( \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \right) \left( 1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3 \right) \right) d\eta = \frac{39}{280}$$

$$\text{και } f'(\eta) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\eta^2 \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2}$$

Παίρνοντας υπόψη μου την (8) προκύπτει ότι:

$$\Delta = 4.64\sqrt{\nu x / U_{\infty}}$$

Το ακριβές πάχος της οριακής στιβάδας υπολογίζεται με τη μέθοδο του Blasius

## 5.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΙΒΑΔΑΣ

Θεωρούμε ροή αέρα γύρω επίπεδη πλάκα μήκους δύο μέτρων. Η ροή είναι παράλληλη στην πλάκα και μακριά από αυτήν είναι ομοιόμορφη. Θεωρούμε ότι το κινηματικό ιξώδες του αέρα είναι ίσο με  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Θεωρούμε επίσης ότι για τις συγκεκριμένες συνθήκες έχουμε η μετάπτωση από στρωτή ροή σε τυρβώδη λαμβάνει χώρα αν  $(Re)_x > 5 \cdot 10^5$ , όπου ο αριθμός  $(Re)_x$  ορίζεται από την σχέση:

$$(Re)_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (1)$$

στην εξίσωση (1) σαν  $U_\infty$  ορίζεται η συνιστώσα της ταχύτητας στην περιοχή ομοιόμορφης ροής και  $x$  η απόσταση από την αρχή της πλάκας.

Απαντήστε στις εξής ερωτήσεις

- α) Λαμβάνει χώρα μετάπτωση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη;
- β) Ποιο είναι το μέγιστο πάχος της στρωτής στιβάδας στην περιοχή της πλάκας;

για τις εξής δύο περιπτώσεις:

I)  $U_\infty = 1 \text{ m/s}$

II)  $U_\infty = 100 \text{ m/s}$

## 5.3 ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΙΒΑΔΑΣ ΣΤΗΝ ΕΙΣΟΔΟ ΑΓΩΓΟΥ

Στην περιοχή στην οποία το ρευστό εισέρχεται σε έναν αγωγό η εγκάρσια κατανομή του πεδίου των ταχυτήτων (κάθετα στον άξονα συμμετρίας), είναι περίπου ομοιόμορφη. Λόγω της επίδρασης της συνθήκης της μη ολίσθησης και των τάσεων ιξώδους, παρατηρείται μία επιβράδυνση του πεδίου των ταχυτήτων κοντά στα τοιχώματα του αγωγού. Το φαινόμενο αυτό έχει σαν συνέπεια να παρατηρείται ακόμα και σε αγωγό σταθερής διαμέτρου αλλαγή στο προφίλ των ταχυτήτων από τα ανάντη προς τα κατόντη σε μία απόσταση  $l_e$  από την είσοδο του αγωγού (η απόσταση αυτή ονομάζεται και περιοχή εισόδου -entrance region). Η παραδοχή της σταθερής κλίσης της πίεσης, ισχύει κατόντη της περιοχής αυτής.

Χαρακτηριστικές τιμές για την απόσταση αυτή σε αδιάστατη μορφή δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{l_e}{D} = 0.06 Re \text{ για την περίπτωση στρωτής ροής}$$

$$\frac{l_e}{D} = 4.4(Re)^{1/6} \text{ για την περίπτωση τυρβώδους ροής}$$

όπου  $D$  η εσωτερική διάμετρος του αγωγού.

### Παράδειγμα εφαρμογής

Εξετάζουμε τις συνθήκες ροής σε αγωγό κυλινδρικής διατομής εσωτερικής διαμέτρου 20 cm και μήκους 50 μέτρων, μέσα στον οποίο διέρχεται παροχή  $Q=1 \text{ l/h}$ . Το κινηματικό ιξώδες του νερού μπορεί να θεωρηθεί ίσο με  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$

- A) Υπολογίστε το μήκος της περιοχής εισόδου για την περίπτωση αυτή
- B) Είναι επιτρεπτό για προσεγγίσεις μηχανικού να εκτιμήσουμε την κλίση της πίεσης σταθερή για όλο το μήκος του αγωγού;

## 5.4 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΥΠΟ ΠΙΕΣΗ

Προσδιορίστε τον συντελεστή γραμμικών απωλειών σε αγωγό κυκλικής διατομής, εσωτερικής διαμέτρου  $D=0,2m$  και τραχύτητας  $k=0,2mm$ , για ροή η οποία χαρακτηρίζεται από αριθμό Reynolds  $Re=80000$ . Προτείνεται να χρησιμοποιήσετε τον παρακάτω τύπο του Colebook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \frac{k}{3,7D} + \frac{2,52}{Re \sqrt{f}} \right]$$

### ΛΥΣΗ

Επιλέγω μία επαναληπτική προσέγγιση με πρώτη εκτίμηση του  $f$ ,  $f_0 = 0.02$

Προκύπτει:

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2 \log \left( \frac{0,001}{3,7} + \frac{2,52}{80 \cdot 10^3 \sqrt{0,02}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2 \log(0,00493)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f_1}} = 6.6142$$

$$\Rightarrow f_1 = \left( \frac{1}{6.6142} \right)^2 = 0.02286$$

Επειδή το σφάλμα υπερβαίνει το 10% συνεχίζω τις επαναλήψεις.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2 \log \left( \frac{0,001}{3,7} + \frac{2,52}{80 \cdot 10^3 \sqrt{0.02286}} \right)$$

$$\Rightarrow f_2 = \left( \frac{1}{6.63965} \right)^2 = 0.02268$$

Ενώ στην τρίτη επανάληψη προκύπτει ότι:

$$f_3 = 0.02269$$

Στην πράξη οι παραπάνω υπολογισμοί διενεργούνται αριθμητικά, π.χ. ενσωματώνονται σε πρόγραμμα υδραυλικών υπολογισμών γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran ή σε άλλη κατάλληλη γλώσσα προγραμματισμού.