

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΩΝ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2007

1^ο ΘΕΜΑ

(3 Μονάδες)

Κατά την επίλυση με αριθμητικές μεθόδους της εξίσωσης συναγωγής-διάχυσης (ή μεταφοράς διαφοράς, κλπ), και όσο αφορά την επιλογή κατάλληλης μεθόδου διακριτοποίησης (αλλά και ενδεχομένως για την περιγραφή του αριθμητικού σχήματος) χρησιμοποιούμε έναν κατάλληλο αριθμό Peclet

1^α) Πως ορίζεται αυτός ο αριθμός Peclet;

1β) Εξηγείστε γιατί ο παραπάνω αριθμός Peclet δεν έχει φυσική σημασία. Δώστε έναν ορισμό του αριθμού Peclet με βάση τον χρόνο t_c ο οποίος απαιτείται για να διανύσει έναν σωματίδιο ρυπαντή μία απόσταση L με μηχανισμούς μεταφοράς και τον αντίστοιχο χρόνο t_d ο οποίος απαιτείται για να διανύσει το σωματίδιο την ίδια απόσταση με μηχανισμούς διάχυσης.

1γ) Ο αριθμός Peclet της ερώτησης 1^α, σχετίζεται με την εκλογή κατάλληλης μεθόδου για την διακριτοποίηση ποιού όρου ή ποιών όρων της εξίσωσης συναγωγής-διάχυσης;

1δ) Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντίστοιχες αριθμητικές μεθόδους με αυτές που χρησιμοποιούμε για την επίλυση της εξίσωσης συναγωγής-διάχυσης. Ποιος είναι ο αντίστοιχος κατάλληλος αδιάστατος αριθμός για τις εξισώσεις Navier-Stokes; Δώστε έναν ορισμό αυτού του αριθμού.

1^ε) Δίνονται οι εξής όροι της εξίσωσης μεταφοράς διασποράς:

I) Όρος μεταφοράς (ή όρος συναγωγής) για προβλήματα μεταφοράς θερμότητας

II) Όρος διασποράς

III) Όρος πηγή-καταβόθρα (όρος χημικών αντιδράσεων)

Δίνονται επίσης οι εξής όροι της εξίσωσης Navier-Stokes

A) Όροι οι οποίοι σχετίζονται με δυνάμεις ιξώδους

B) Όροι οι οποίοι σχετίζονται με δυνάμεις αδράνειας

Γ) Όροι οι οποίοι σχετίζονται με δυνάμεις πίεσης

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου SIMPLE πρέπει να πάρουμε υπόψη μας ορισμένες δομικές αναλογίες ανάμεσα στην εξίσωση μεταφοράς διασποράς και της εξίσωσης Navier-Stokes.

Δώστε την αντιστοιχία ανάμεσα στους όρους A, B, Γ και I, II, III.

Ποιος ή ποιοι όροι από τους παραπάνω πρέπει να γραμμικοποιηθούν; Εξηγήστε το πώς πρέπει να γίνετε η γραμμικοποίηση αυτή.

1ζ) Ποια εξίσωση πρέπει να πάρουμε υπόψη μας κατά τη μέθοδο SIMPLE για να προσδιορίσουμε την πίεση;

2^ο ΘΕΜΑ

(2,0 Μονάδες)

2^α) Ποιόν αδιάστατο αριθμό πρέπει να εξετάσουμε για να δούμε εάν μπορεί να μετατραπεί η εξίσωση συναγωγής-διασποράς στην εξίσωση καθαρής συναγωγής; Ποιες τιμές πρέπει να παίρνει ο αδιάστατος αυτός αριθμός για να ισχύει ο παραπάνω μετασχηματισμός; (Αιτιολογείτε την απάντησή σας παίρνοντας υπόψη σας την φυσική του προβλήματος).

2β) Κατά την επίλυση της εξίσωσης καθαρής συναγωγής με ρητό αριθμητικό σχήμα, η λύση η οποία προκύπτει είναι δυνατόν να είναι ασταθής (Να παρουσιάζει έντονες ταλαντώσεις και χαοτική συμπεριφορά). Με την βοήθεια ποιου αδιάστατου αριθμού μπορούμε να εκτιμήσουμε πριν από την διενέργεια υπολογισμών αν θα παρουσιαστούν τέτοια προβλήματα; Πως ορίζεται ο αριθμός αυτός και ποιο είναι το κριτήριο ευστάθειας;

2γ) Ποια είναι η βέλτιστη τιμή του αδιάστατου αριθμού τον οποίο αναφέρατε στην ερώτηση 2β όσο αφορά την ακρίβεια της λύσης; Για ποιόν λόγο δεν είναι πάντα δυνατόν στην να επιλέγουμε την βέλτιστη αυτή τιμή;

2δ) Απαντήστε την παραπάνω ερώτηση (2β) όσο αφορά την εξίσωση της καθαρής διάχυσης

3^ο ΘΕΜΑ

(1,0 Μονάδα)

Αν χρησιμοποιήσουμε ένα **ρητό σχήμα** (*explicit scheme*) για την διακριτοποίηση της εξίσωσης της θερμότητας, προκύπτει για κάθε χρονικό σημείο, μία ομάδα αλγεβρικών εξισώσεων, στην οποία εμφανίζεται σε κάθε εξίσωση μόνο ένας άγνωστος (τιμή της άγνωστης μεταβλητής σε ένα σημείο του κανάβου). Προφανώς, στην περίπτωση αυτή, οι τιμές όλων των αγνώστων μπορούν να προσδιοριστούν άμεσα και εύκολα: η κάθε αλγεβρική εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες.

Αντίθετα αν χρησιμοποιήσουμε ένα **άρρητο σχήμα** (*implicit scheme*) για την διακριτοποίηση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, στις αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν εμφανίζεται παραπάνω από ένας άγνωστος σε κάθε (αλγεβρική) εξίσωση. Ένας άμεσος προσδιορισμός των αγνώστων δεν είναι πλέον δυνατός. Κατά συνέπεια είναι απαραίτητη η επίλυση ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων, διαδικασία η οποία παρουσιάζει συχνά δυσκολίες.

Παρ' όλα αυτά χρησιμοποιούμε στην πράξη κατά κανόνα ένα άρρητο σχήμα τόσο για την επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας, αλλά και για την επίλυση άλλων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

Εξηγήστε τους λόγους για τους οποίους γίνεται η παραπάνω επιλογή.

4° ΘΕΜΑ

(2,0 Μονάδες)

Για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς διασποράς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Random-Walk

- 4α) Ποιο είναι το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής σε σχέση με τις συμβατικές μεθόδους;
- 4β) Στην μέθοδο αυτή για να προσομοιώσουμε την κίνηση των σωματιδίων λόγω διασποράς θεωρούμε ότι η κίνηση τους είναι στοχαστική με κατανομή K . Ποια είναι η κατανομή αυτή;
- 4γ) Για να υπολογίσετε την πιθανότητα να διανύσουν τα σωματίδια μία ορισμένη απόσταση με βάση την κατανομή K είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσετε μία εξίσωση η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας αυτής, αθροίζοντας στοχαστικούς αριθμούς οι οποίοι έχουν ομοιόμορφη κατανομή. Ποια είναι η εξίσωση αυτή; Δώστε ένα παράδειγμα από την καθημερινή ζωή του νεοέλληνα, κατά το οποίο ένας (στοχαστικός) αριθμός με κατανομή K προκύπτει από το άθροισμα δύο στοχαστικών αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή.
- 4δ) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Random-Walk, όπως αυτή είχε παρουσιαστεί στην παράδοση, προέκυψε ότι σε ένα ορισμένο χρονικό σημείο και σε ένα ορισμένο κελί βρίσκονται 12 σωματίδια. Εξηγήστε **σύντομα** πως είναι δυνατόν να υπολογιστεί συγκέντρωση στο κελί αυτό. Μπορείτε να ορίσετε εσείς όσα δεδομένα δεν δίνονται ρητά.

5° ΘΕΜΑ

(2,0 Μονάδες)

Η εξίσωση της διάχυσης έχει την ίδια δομή και με άλλα προβλήματα τα οποία εμφανίζονται στη μαθηματική φυσική. Αναφέρατε τρία άλλα φυσικά φαινόμενα τα οποία περιγράφονται με την ίδια εξίσωση και έχουν εφαρμογή στην επιστήμη των μηχανικών περιβάλλοντος. Αναφέρατε ένα πρόβλημα του οποίου είναι γνωστή η αναλυτική λύση της εξίσωσης της διάχυσης και το οποίο είχε αναφερθεί εκτός από την παράδοση της υπολογιστικής υδραυλικής και στην παράδοση της Ρευστομηχανικής και στην παράδοση της Υπόγειας Υδραυλικής. Περιγράψτε σε ποιο φυσικό πρόβλημα αντιστοιχεί η λύση αυτή με παραδείγματα από τουλάχιστον τρία διαφορετικά φυσικά φαινόμενα. Κάντε τα αντίστοιχα σκαριφήματα και γράψτε τις ανάλογες οριακές συνθήκες. Αναφέρατε σύντομα τα πλεονεκτήματα και τα μειονε